

# Winkelkorrelation

Moritz Bubek, Claudia Gnahn

05.11.2003

## 1 Theorie

### 1.1 Zerfallsarten

#### 1.1.1 $\alpha$ -Zerfall

Protonen und Neutronen sind auch in schweren Kernen mit bis zu 7 MeV gebunden, und können daher nicht gemäß Abb. 1 aus dem Kern entweichen. Die Emission eines gebundenen Systems ist eher möglich, da zusätzlich die Bindungsenergie des gebundenen Systems zur Verfügung steht. Von Bedeutung ist dies insbesondere für  $\alpha$ -Teilchen ( ${}^4_2\text{He}$ -Kern), da sie eine außerordentlich große Bindungsenergie von 7.1 MeV/Nukleon zeigt. Atomkerne besitzen eine Coulombbarriere, die beispielsweise ein sich im Kern formiertes Alphateilchen daran hindert, denselben zu verlassen. Dieses müßte dazu eine potentielle Energie besitzen, welche größer als das abstoßende Coulombpotential

$$V_{Coul} = 2(Z - 2)\frac{\alpha}{r} \quad (1)$$

ist. Klassisch ist es für  $E < 2(Z - 2)\alpha/R$  unmöglich, diese Barriere zu überwinden; quantenmechanisch besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit für das Teilchen, die Barriere und damit den klassisch verbotenen Bereich zu durchtunneln. Tunnelwahrscheinlichkeit läßt sich in der WKB Nä-

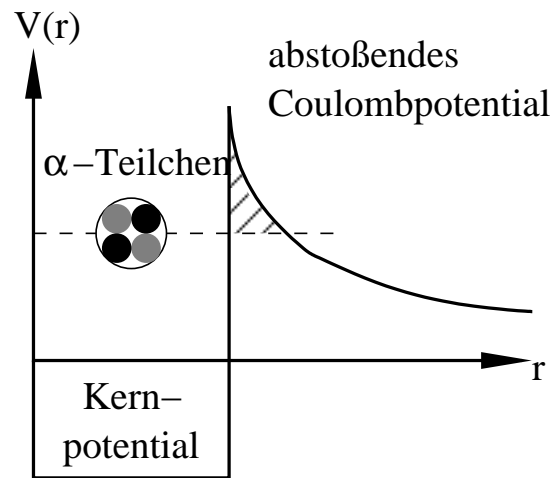


Abbildung 1: abstoßendes Coulombpotential

herung bestimmen als

$$W(E) = \exp \left\{ \int \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(V(x) - E)} \right\} \quad (2)$$

Im allgemeinen verbleibt ein Atomkern nach einem  $\alpha$ -Zerfall in einem angeregten Zustand. Aus diesem kehrt er unter Emission eines  $\gamma$ -Quants in den Grundzustand zurück.

#### 1.1.2 $\gamma$ -Zerfall

Sowohl nach einem  $\alpha$ - als auch nach einem  $\beta$ -Zerfall befindet sich der Atomkern häufig noch

ein einem angeregten Zustand. Die überschüssige Energie kann der Kern nun durch die Emission eines  $\gamma$ -Quants loswerden. Da die einzelnen Energieniveaus im Kern diskret sind, sind auch die Energien der ausgesandten Quanten wohldefiniert. Wie bei allen elektromagnetischen Prozessen bleiben zudem auch Drehimpuls und Parität erhalten. Beim  $\gamma$ -Zerfall werden die Nukleonen des Kerns weder umgewandelt noch ausgesandt. Das bedeutet, dass vor und nach dem Energieabbau das gleiche Element vorhanden ist.

### 1.1.3 $\beta$ - Zerfall

Der  $\beta$  - Zerfall umfaßt drei Formen von Kernumwandlungen, die durch die sogenannte schwache Wechselwirkung verursacht werden. Bei allen dreien ändert sich die Kernladungszahl um  $\Delta Z = \pm 1$ , während die Massenzahl gleich bleibt.

- Unter  $\beta^-$  - Zerfall versteht man die Instabilität eines Atomkerns gegenüber der Emission eines Elektrons. Dabei verwandelt sich im Kern ein Neutron unter Emission eines Elektrons und eines Antineutrinos in ein Proton. Die Zerfallsenergie verteilt sich auf Elektron und Antineutrino.
- Beim  $\beta^+$  - Zerfall verwandelt sich umgekehrt ein Proton in ein Neutron, wobei ein Positron und ein Neutrino emittiert werden.
- Der Elektroneneinfang ist die dritte Form des  $\beta$  - Zerfalls. Hierbei wird zur Umwandlung eines Protons in ein Neutron ein Hüllenelektron durch den Kern eingefangen.

Im Gegensatz zum Alphaspektrum ist das Betaspektrum kontinuierlich. Theoretisch kann zwar das  $\beta$  - Teilchen oder auch das (Anti)neutrino die

gesamte Zerfallsenergie übernehmen, aber beides ist sehr unwahrscheinlich. Wesentlich wahrscheinlicher sind alle Zwischenzustände.

## 1.2 Multipolstrahlung

Bei einem  $\gamma$ -Zerfall gelten - wie immer - Energie-, Impuls-, und Paritätserhaltung, daher muss das emittierte  $\gamma$ -Quant wohldefinierten Drehimpuls, wohldefinierte Energie und wohldefinierte Parität besitzen. Man sucht daher Lösungen der Maxwell-Gleichungen, die Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators sind. Diese Lösungen beschreiben Multipolfelder und haben in SI-Einheiten folgende Form:

- Elektrischer  $2^l$ -Pol (El-Strahlung)

$$\vec{B}_m^l = f_l(kr) \hat{L} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (3)$$

$$\vec{E}_l^m = i \frac{c}{k} \nabla \times \vec{B}_l^m \quad (4)$$

- Magnetischer  $2^l$ -Pol (Ml-Strahlung)

$$\vec{E}_m^l = f_l(kr) \hat{L} Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (5)$$

$$\vec{B}_l^m = -i \frac{1}{kc} \nabla \times \vec{E}_l^m \quad (6)$$

Aus den Transformationseigenschaften dieser Multipolfelder und beim Übergang  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$  erkennt man, daß sie definierte Parität haben:  $\pi = (-1)^l$  für E-Strahlung und  $\pi = (-1)^{l+1}$  für M-Strahlung.

Die Abstrahlcharakteristik lässt sich aus den Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen über die Energieflußdichte, also dem Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (7)$$

berechnen. Im Vergleich zu den Kerndimensionen befinden sich die  $\gamma$ -Detektoren in großer Entfer-

	$l = 1$ (Dipol)	$l = 2$ (Quadrupol)
$m = 0$	$\frac{1}{2} \sin^2 \vartheta$	$\frac{3}{2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$
$m = \pm 1$	$\frac{1}{4}(1 + \cos^2 \vartheta)$	$\frac{1}{4}(1 - 3 \cos^2 \vartheta + 4 \cos^4 \vartheta)$
$m = \pm 2$	-	$\frac{1}{4}(1 - \cos^4 \vartheta)$

Tabelle 1: Winkelverteilungsfunktion  $F_{lm}(\vartheta)$  für Dipol- und Quadrupolstrahlung [?]

nung von der Quelle, so daß man die Fernfeldnäherung einsetzen kann und

$$|\vec{S}| = c \cdot \epsilon_0 |\vec{E}|^2 \quad (8)$$

$$|\vec{S}| = c \cdot \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \quad (9)$$

erhält. Setzt man hier Gln. (3) und (5) ein, erkennt man, dass elektrische und magnetische Multipolstrahlung gleicher Multipolordnung die gleiche Abstrahlcharakteristik aufweisen. Man führt die normierten Winkelverteilungen

$$F_{lm}(\vartheta) = \frac{|\hat{\vec{L}} \cdot Y_l^m|^2}{\sum_m |\hat{\vec{L}} \cdot Y_l^m|^2} \quad (10)$$

ein. Für Dipol- und Quadrupolübergänge ist die Winkelverteilungsfunktion in Tab. 1 angegeben, eine grafische Darstellung ist in Abb. 2 wiedergegeben.

### 1.3 Vernichtungsstrahlung eines Positron-Elektron-Paares

In diesem Versuch verwenden wir eine  $^{22}\text{Na}$ -Quelle zur Erzeugung der Annihilationsstrahlung, welche wir detektieren wollen. Aus dem Zerfallsschema (Abb. ??) sieht man, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ein Positron der Energie 542 keV ausgesandt wird, welches bereits innerhalb des Natriums noch mit einem Elektron rekombiniert und dabei in zwei  $\gamma$ -Quanten der Energie 511 keV zerstrahlt. Die beiden  $\gamma$ -Quanten entstehen dabei absolut gleichzeitig.

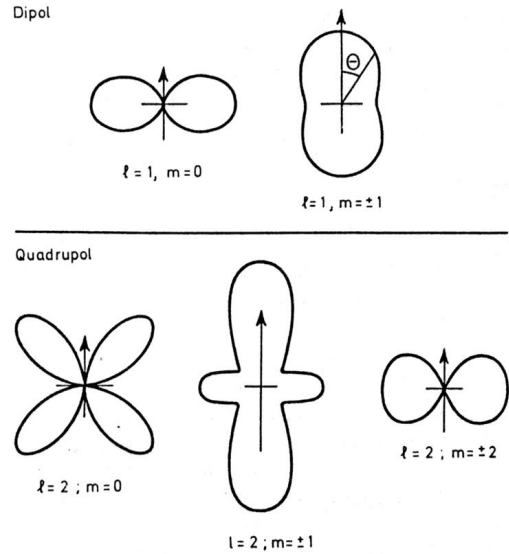


Abbildung 2: Abstrahlcharakteristik von Dipol- und Quadrupolübergängen

Sofern der Schwerpunkt des Elektron-Positron-Paares in Ruhe war, werden die  $\gamma$ -Quanten unter einem Winkel von  $180^\circ$  emittiert, andernfalls ergibt sich eine Winkelverschiebung und eine Doppler-Verschiebung der Energie der  $\gamma$ -Quanten. Dies führt bei einer Korrelationsmessung zu einer Verteilungsfunktion um den Winkel  $\vartheta = 180^\circ$ . Diese Korrelation kann im vorliegenden Versuch allerdings nicht beobachtet werden, da sie wesentlich schmäler ist als die Winkelauflösung der verwendeten Detektoren.

### 1.4 Ungestörte Winkelkorrelation bei $^{60}\text{Co}$

Der aus dem  $^{60}\text{Co}$ -Kern durch einen  $\beta^-$ -Zerfall entstehende  $^{60}\text{Ni}$ -Kern zerfällt nach dem Zerfallsschema Abb. ?? in einer Kaskade von zwei E2-Übergängen. Der theoretisch ebenfalls möglicher

Zerfall nur durch einen E4-Übergang muss nicht berücksichtigt werden, da er um viele Größenordnungen unwahrscheinlicher ist als die Kaskade. Die beiden emittierten  $\gamma$ -Quanten zeigen eine Winkelkorrelation, da sie vom gleichen Kern ausgesandt werden. Die exakte theoretische Behandlung dieses Effektes ist sehr kompliziert, eine Darstellung findet sich z.B. in [?]. In einer solchen Theorie sind die beiden beteiligten  $\gamma$ -Quanten völlig gleichberechtigt. Die Theorie liefert die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Winkel  $\vartheta$  zwischen zwei  $\gamma$ -Detektoren zwei  $\gamma$ -Quanten in Koinzidenz zu messen.

Bei der hier betrachteten ungestörten  $\gamma\gamma$ -Winkelkorrelation führt ein vereinfachter Ansatz zum Ziel: man legt willkürlich die z-Achse in Richtung des Zählers Det. 1 (siehe Abb. ??), dann gilt für den  $\gamma_1$ -Übergang die Auswahlregel  $m = \pm 1$ . Durch die Selektion der speziellen  $\gamma_1$ -Quanten erfolgt eine ungleiche Besetzungswahrscheinlichkeit der M-Unterszustände des Zwischenniveaus, was direkt zur Folge hat, dass die Emission des  $\gamma_2$ -Quants bezogen auf die z-Richtung nicht mehr isotrop erfolgt, sondern eine Winkelabhängigkeit zeigt. Die zugehörige Winkelverteilungsfunktion berechnet sich nach [?] zu

$$W(\vartheta) \propto \sum_{M, M_f} P(M) G(M \rightarrow M_f) \cdot F_{l_2 m_2}(\vartheta) \quad (11)$$

wobei  $P(M)$  die Wahrscheinlichkeit ist,  $M$  zu besetzen,  $G$  ist die Wahrscheinlichkeit von  $M$  nach  $M_f$  überzugehen (siehe Abb. 3), und  $F_{l_2 m_2}$  die Winkelverteilungsfunktion wie in Absatz 1.2 angegeben ist.

Nach Berechnung der Wahrscheinlichkeiten und Einsetzen der Abstrahlcharakteristiken erhält man aus Gl. (11) die Winkelverteilungsfunktion für  $^{60}\text{Co}$  zu

$$W(\vartheta) = 1 + \frac{1}{8} \cos^2 \vartheta + \frac{1}{24} \cos^4 \vartheta. \quad (12)$$

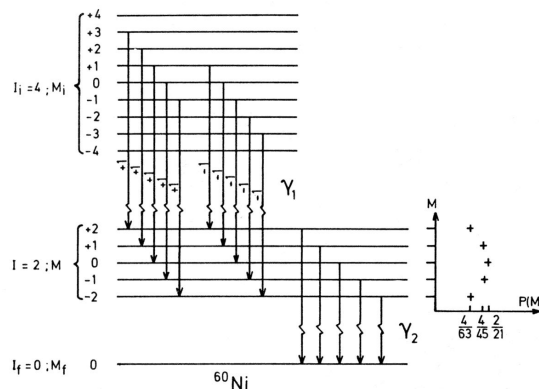


Abbildung 3: Mögliche Übergänge in  $^{60}\text{Ni}$  bei Wahl der z-Achse in Richtung Det. 1. Auf der rechten Seite sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $P(M)$  der verschiedenen Unterszustände im Niveau  $M$  aufgetragen. Die  $M_i$ - und  $M$ -Zustände sind energetisch entartet und nur aus Darstellungsgründen aufgetrennt.

## 1.5 Zerfallsschemata

### 1.5.1 $^{60}\text{Co}$

$^{60}\text{Co}$  hat eine Halbwertszeit von 5,2 Jahren. Beim Zerfall wird zunächst ein Elektron der Energie 312 KeV ausgesandt. Daraufhin wird ein  $\gamma$ -Quant der Energie 1,172 MeV und eines der Energie 1,333 MeV abgestrahlt.

### 1.5.2 $^{22}\text{Na}$

$^{22}\text{Na}$  besitzt eine Halbwertszeit von 2,6 Jahren. Es wird zunächst ein Positron der Energie

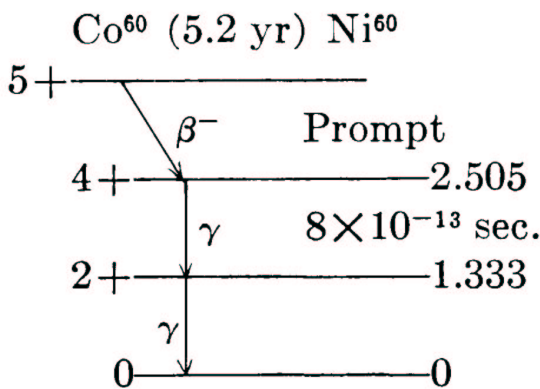


Abbildung 4: Zerfallsschema von <sup>60</sup>Co

542 KeV ausgesandt. Dies wird in 10% der Fälle eingefangen und durch Annihilation in zwei  $\gamma$ -Quanten der Energie 511 KeV umgewandelt. Außerdem wird ein  $\gamma$ -Quant der Energie 1,277 MeV abgestrahlt.

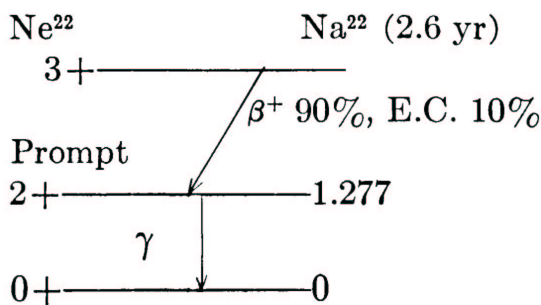


Abbildung 5: Zerfallsschema von <sup>22</sup>Na

## 1.6 Koinzidenzmethoden

In der Teilchenphysik wird häufig von sogenannten Koinzidenzmethoden Gebrauch gemacht. Oft ist man nur an Ereignissen interessiert, die gleichzeitig oder in kurzer Folge mehrere Teilchen ent-

stehen lassen. In einem solchen Fall kann die Bedingung, daß *beide* Teilchen detektiert werden verwendet werden, um zwischen echten Ereignissen und Störeffekten wie z.B. der Hintergrundstrahlung zu unterscheiden.

Die ersten Koinzidenzschaltungen wurden 1930 von W. Bothe und B. Rossi aus Vakuumröhren aufgebaut. Sie verbanden zwei Geigerzähler über ihre Schaltung so miteinander, daß nur Ereignisse gezählt wurden, die innerhalb einer Millisekunde in beiden Zählern auftreten. Sie interpretierten dieses Ereignis als ein hochenergetisches Teilchen, daß beide Zähler durchläuft. Sie konnten so die Bewegungsrichtung des schnellen Teilchens bestimmen. Solche Teilchenteleskope werden auch heute noch in Beschleunigern eingesetzt, um den Weg der Teilchen zu verfolgen.

Allgemein dienen Koinzidenzstufen dazu, gleichzeitig stattfindende Ereignisse aus dem Hintergrundrauschen herauszufiltern. Gleichzeitig heißt in diesem Zusammenhang, daß zwei oder mehr Ereignisse bzw. Impulse innerhalb eines Zeitfensters auftreten. Bei einem UND-Gatter in einer Digitalschaltung wird dieses Zeitfenster durch die Breite der Eingangsimpulse und die Flankensteilheit der logischen Signale bzw. die Schaltzeiten der Gatter bestimmt. Die Breite dieser beiden Anstiegsflanken ist die untere sinnvolle Grenze für die Zeitauflösung einer Koinzidenzstufe.

Besitzt nun ein Präparat die Aktivität  $A$  und die einzelnen Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten  $p_1$  und  $p_2$ , also die Zähleraten

$$n_1 = p_1 A \quad n_2 = p_2 A \quad (13)$$

so ist die Koinzidenz-Zählrate gerade

$$n_K = p_1 p_2 A \quad (14)$$

also deutlich geringer und damit besser zu erfassen. Andererseits besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit einer *zufälligen* Koinzidenz

$$n_Z = \tau n_1 n_2 = \tau p_1 p_2 A^2 \quad (15)$$

wobei  $\tau$  ein Maß für die Zeitauflösung der Koinzidenzstufe ist. Da die Koinzidenz-Zählrate größer als die Zufalls-Koinzidenz-Zählrate sein soll folgt aus Gleichung (15) und (14) sofort:

$$\tau A \stackrel{!}{=} 1 \quad (16)$$

### 1.6.1 Koinzidenzschaltungen

#### Gleichstrom-gekoppelte Koinzidenzstufen

Die schaltungsrchnisch einfachsten Koinzidenzstufen sind mit gleichstromgekoppelten UND-Gattern aufgebaut. Da ein Ausgangssignal nur während der Überlappungszeit auftritt, werden sie auch als Überlapp-Koinzidenzen bezeichnet. Für Anwendungen in der Hochenergiephysik werden solche Einheiten mit umschaltbaren UND/ODER-Verknüpfungen und invertierenden Eingängen versehen, so daß beliebige logische Verknüpfungen zwischen den einzelnen Ereignissen zu erzielen sind.

**Getriggerte Koinzidenz-Stufen** In vielen Fällen enthält nur die Vorderflanke eines Impulses die wichtige Zeitinformation. Um diese Flanke innerhalb eines Zeitfensters zur Koinzidenz bringen zu können, steuert bei getriggerten Koinzidenzstufen jeder Eingang einen Monovibrator an, die Ausgänge dieser Monovibratoren werden UND-verknüpft. Man kann so über die Breite der Monovibrator-Impulse die Zeitauflösung der Koinzidenz-Stufe in einem großen Bereich einstellen.

### 1.6.2 Verzögerungsstufen

Zeitsignale und sonstige logische Signale müssen in Koinzidenzanlagen häufig verzögert werden, um die Laufzeiten verschiedener Signale in Detektoren, Verstärkern und sonstigen Geräten oder Flugzeiten von Teilchen aneinander anpassen zu können.

**Kabel-Verzögerungen** Für die Verzögerung von schnellen Zeitsignalen im Bereich bis ca. 100ns werden Koaxialkabel entsprechender Länge benutzt, die in mehreren Stücken hintereinandergeschaltet werden können.

#### Verzögerungsstufen mit Monovibratoren

Diese auch „Delay and Gate Generator“ genannten Bauteile werden für die Einstellung größerer Verzögerungszeiten verwendet. Zusätzlich erlauben sie eine kontinuierliche Variation der Verzögerungszeiten.

Diese Geräte bestehen aus zwei hintereinandergeschalteten Monovibratoren, von denen der erste mit der Vorderflanke des Eingangssignals angestoßen wird. Die Impulsbreite dieser Monovibrators bestimmt die Verzögerungszeit. Mit der Rückflanke seines Ausgangssignals wird ein zweiter Monovibrator getriggert, der die Breite des Ausgangssignals bestimmt.

## 2 Auswertung

### 2.1 Impulshöhenspektrum von $^{60}\text{Co}$

Bei der Messung mit einem Vielkanalanalysator kann man die abgestrahlten Energien des  $\text{Co}^{60}$  als Peaks identifizieren. Diese liegen bei 1.172 MeV und 1.333 MeV.

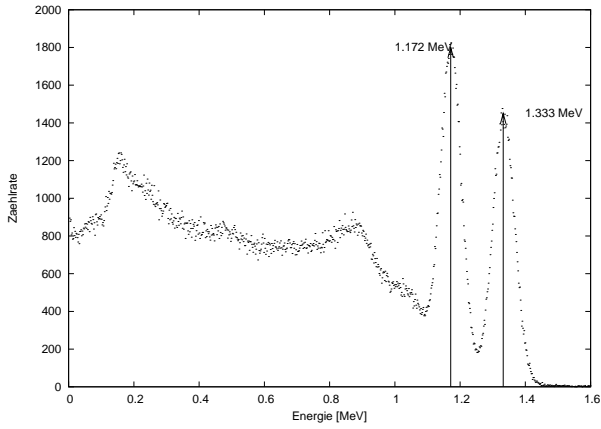


Abbildung 6: Impulshöhenspektrum von  $^{60}\text{Co}$

## 2.2 Verhältnis von zufälligen und tatsächlichen Koinzidenzen

Das Verhältnis von tatsächlichen zu zufälligen Koinzidenzen ergibt sich aus folgenden Überlegungen: Im Detektor 1 ist die Zählrate  $R_1 = N\omega_1\varepsilon_1$  mit  $\omega$  vom Detektor erfassten Raumwinkel/ $4\pi$ ,  $\varepsilon$  Nachweiswahrscheinlichkeit,  $N$  Aktivität der Quelle. Analog gilt für den Detektor 2:  $R_2 = N\omega_2\varepsilon_2$ . Für die wahren Koinzidenzen gilt:  $R_c = N\omega_1\varepsilon_1\omega_2\varepsilon_2$ , und für die zufälligen Koinzidenzen gilt:  $R_z = R_1R_2\Delta t = N^2\omega^2\varepsilon^2$ , da es sich um die gleichen Detektoren handelt ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ ). Somit gilt also:

$$\frac{R_z}{R_c} = N \cdot \Delta t$$

## 2.3 Auflösung der Koinzidenzmessung

Der Delay eines Kanals wird fest eingestellt und mit der Delay des anderen wird nach dem Maximum der Koinzidenzzählrate gesucht. Für verschiedene Zeitaufösungen (10 und 100 ns) erge-

ben sich verschieden breite Verteilungen um die maximale Zählrate, also verschieden breite Bereiche in denen man sinnvoll Koinzidenzen messen kann.

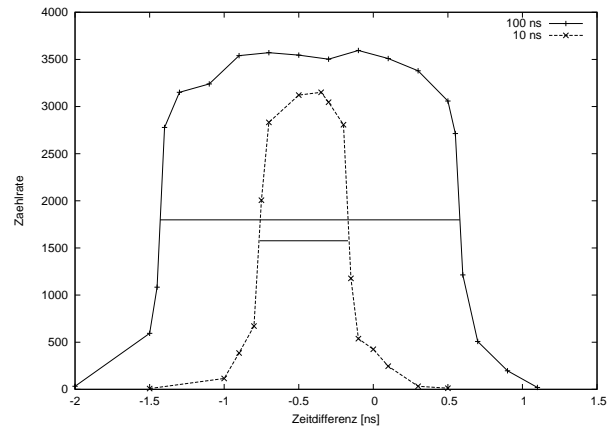


Abbildung 7: Zeitauflösung der Meßapparatur

Aus den Halbwertsbreiten der Kurven kann man die Winkelauflösung der Apparatur berechnen. Für 10 ns ist diese Halbwertsbreite 0.59 ns, bei der 100 ns-Messung ist diese fast viermal so groß (2.01 ns). Deshalb werden die weiteren Messungen mit einer Auflösung von 10 ns durchgeführt.

### 2.3.1 Winkelauflösung des Systems

Aus der Geometrie des Versuchsaufbaus läßt sich die Winkelauflösung des Systems folgendermaßen berechnen:

$$\Delta\theta = 2 \cdot \arctan \cdot \frac{\text{Radius des Detektorfensters}}{\text{Abstand der Probe zum Detektor}}$$

Damit ergibt sich  $\Delta\theta = 15.8^\circ$ .

Bei den Messungen mit Kobalt wurden in 19.75 cm Entfernung zur Probe durchschnittlich

445312 Ereignisse auf dem  $26.4 \text{ cm}^2$  großen Detektor registriert. Für den ganzen Raum, also die totale Aktivität ergibt sich daraus  $82.6 \cdot 10^6$  Zerfälle. Bei einer Meßdauer von 300 s kann man damit die durchschnittliche Zeit  $\Delta t$  zwischen zwei Zerfällen berechnen.

$$\Delta t = 3.6 \mu s$$

## 2.4 Winkelkorrelation von $^{60}\text{Co}$

Die theoretische Kurve ist durch

$$f(\theta) = 1 + \frac{1}{8} \cdot \cos^2(\theta) + \frac{1}{24} \cdot \cos^4(\theta)$$

gegeben. Die theoretisch erwartete Kurve liegt im Wesentlichen innerhalb der Fehler der Messungen. Die zum Teil großen Abweichungen bei einzelnen Winkeln sind vermutlich auf zu kurze Meßdauern (300 s) zurückzuführen.

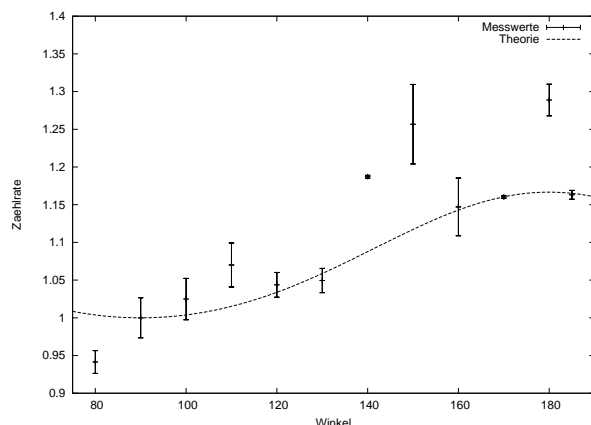


Abbildung 8: Winkelabhängigkeit der Koinzidenz bei  $^{60}\text{Co}$

### 2.4.1 Anisotropiefaktor

$$A = \frac{C(180^\circ) - C(90^\circ)}{C(90^\circ)}$$

Bei unseren Meßdaten ergibt sich ein Anisotropiefaktor von  $A = 0.29 \pm 0.04$ .

## 2.5 Winkelkorrelation von $^{22}\text{Na}$

Bei einer Meßdauer von 300 ns wurden für verschiedene Winkel zwischen  $150$  und  $190^\circ$  die Koinzidenzen gemessen. Durch die sehr große Zahl der Ereignisse können die zufälligen Koinzidenzen vernachlässigt werden.

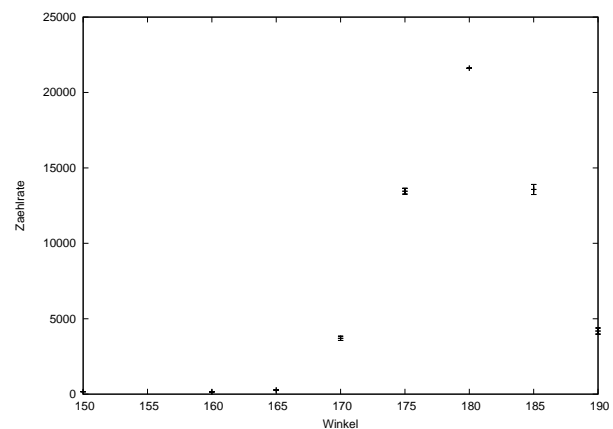


Abbildung 9: Winkelabhängigkeit der Koinzidenz bei Elektron - Positron - Vernichtungsstrahlung

## Literatur

- [1] Nukleare Festkörperphysik / Schatz; Weidinger - Teubner Studienbücher, Stuttgart
- [2] Experiments in modern Physics / Melissinos - Academic Press, New York