

Projektpraktikum Physik

Der tropfende Wasserhahn - Wege ins Chaos

Gruppe 1

Daniel Träutlein, Markus Beyer, Markus Müller,
Moritz Bubek, Tim Thomay, Pascal Frank

Sommersemester 2002

Der Tropfende Wasserhahn als chaotisches System. Unter bestimmten Bedingungen lässt sich eine Frequenz für das Tropfen angeben. Unter leicht veränderten Bedingungen - in unserem Fall wird die Durchflußmenge variiert - gibt es plötzlich zwei oder mehrere Frequenzen. Das System wechselt von periodischem zu chaotischem Verhalten.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Ein kurzer historischer Rückblick	4
3. Chaostheoretische Grundlagen	5
3.1. Charakteristische Eigenschaften chaotischer Systeme	5
3.2. Mathematische Grundlagen	7
3.3. Verschiedene Darstellungsmöglichkeiten	10
3.3.1. Phasenraum und Attraktoren	10
3.3.2. Feigenbaum-Diagramm und Delay-Abbildung	12
4. Versuchsdurchführung	15
4.1. Versuchsaufbau	15
4.2. Durchführung	16
4.2.1. Cassy	16
5. Auswertung	18
5.1. Messungen mit konstanter Durchflußmenge	18
5.2. Messungen mit kontinuierlichem Druckabfall	19
6. Schlußfolgerung	20
A. Meßreihen	22

1. Einleitung

Die wissenschaftliche Erforschung von Chaos hat ihre Wurzeln im 18. und 19. Jahrhundert, als Mathematiker wie zum Beispiel Laplace oder Poincaré sich mit Fragen der Vorhersagbarkeit, Zufall und Wahrscheinlichkeit im Verhalten von Natur beschäftigten. Aufgrund der Entwicklung der Quantenmechanik zu Anfang des 20. Jahrhunderts geriet das Interesse an Fragestellungen zu chaotischen Systemen vorübergehend in den Hintergrund. Nicht zuletzt wegen der rapiden Entwicklung der Computertechnik hat sich jedoch in den letzten 30 Jahren die Chaostheorie zu einem eigenen großen Forschungsgebiet der Physik entwickelt. Chaos schränkt zwar zunächst grundsätzlich die Vorhersagbarkeit ein, legt jedoch auch kausale Zusammenhänge in Strukturen nahe, wo man auf den ersten Blick keine erwartet: So kommen komplexere Klimamodelle nicht umhin, chaotische Einflüsse in ihren Berechnungen zu berücksichtigen (Stichwort Schmetterlingseffekt), und auch viele biologische Systeme wie Räuber-Beute-Populationsdynamik, Streifen- und Fleckenmuster auf Tierfellen sowie das für den Sekundenherztod verantwortliche Herzkammerflimmern, können nur mithilfe von chaostheoretischen Ansätzen richtig beschrieben werden.

Auch im Alltag begegnen einem viele Gesichter des Chaos: Beim Mischen verschiedener Flüssigkeiten beispielsweise können sich turbulente, nicht mehr vorher-sagbare Strömungen bilden. In chaotischen Systemen lassen sich auch andererseits gewisse Regeln und Gesetze erkennen: Zum Beispiel beobachtet man, wenn man morgens Milch in den Kaffee schüttet, daß sich bestimmte Wirbelmuster immer wieder ausbilden, während man andere nur selten oder nie beobachtet. Das wohl mittlerweile populärste und bekannteste Beispiel eines chaotischen Alltagssystems ist der tropfende Wasserhahn. Man ist zunächst ziemlich verblüfft, daß sich an solch einem einfachen System chaotisches Verhalten zeigt, erwartet man doch eigentlich ein sehr regelmäßiges (vor allem nachts nervtötendes) Tropfverhalten. Wir haben uns dazu entschieden, uns im Rahmen des Projektpraktikums mit dem tropfenden Wasserhahn als typischen Vertreter eines chaotischen Systems zu beschäftigen. Wir wollen an diesem Beispiel allgemeine Eigenschaften von chaotischen Systemen und im speziellen den Übergang von periodischem zu chaotischem Verhalten untersuchen.

2. Ein kurzer historischer Rückblick

CHAOS - Ursprünglich stammt das Wort Chaos aus dem Griechischen und bedeutet soviel wie: Gähnender Schlund, Abgrund, klaffende Leere. Doch schon in der Antike erfuhr der Begriff eine (philosophische) Umdeutung, etwa unter den Philosophen Anaxagoras und Plato: Urstoff, gestaltlos, ungeformt. Im heutigen Sprachgebrauch hat das Wort Chaos ungefähr folgende Bedeutung: Durcheinander, Wirrwarr, Irregularität oder Unordnung; es ist also eher negativ besetzt und steht für im allgemeinen nicht besonders wünschenswerte Zustände.

Interessant ist auch, daß der Begriff *Gas* um das Jahr 1600 herum von J.v.Helmont als Überbegriff für luftartige Stoffe geprägt wurde, in direkter und berechtigter Anlehnung an Chaos. Vom griechischen Wort *chaskein* stammt das Verb *Gähnen* ab, ein direkter Verweis auf die ursprüngliche Bedeutung des Wortes Chaos.

Chaos als wissenschaftlicher Begriff hat seinen Ursprung im engeren Sinn im 18. Jahrhundert, als der französische Mathematiker Pierre Simon de Laplace (1749-1827) behauptete, daß die Gesetze der Natur strikt deterministisch seien - Wahrscheinlichkeitstheorie wäre nur wegen der unvermeidlichen Meßfehler notwendig. 1776 formulierte Laplace diesen Standpunkt folgendermaßen: „Der momentane Zustand des „Systems“ Natur ist offensichtlich eine Folge dessen, was er im vorherigen Moment war, und wir uns eine Intelligenz vorstellen, die zu einem gegebenen Zeitpunkt alle Beziehungen zwischen den Teilen des Universums verarbeiten kann, so könnte sie Orte, Bewegungen und allgemeine Beziehungen zwischen all diesen Teilen für alle Zeitpunkte in Vergangenheit und Zukunft vorhersagen.“ Laplace sah die Ursache für nicht vorhersagbares Verhalten also nur in der fehlenden Möglichkeit des Menschen, exakte Messungen eines Ausgangszustandes durchzuführen. Für mehr als 100 Jahre zweifelte kaum jemand an der prinzipiellen Berechtigung dieses Gedankens. Der Mathematiker Henri Poincaré (1854-1912) nimmt dagegen den heutigen Standpunkt vorweg, was Voraussagbarkeit von zukünftigem Verhalten angeht: „Eine sehr kleine Ursache, die wir nicht bemerken, bewirkt einen beachtlichen Effekt, den wir nicht übersehen können, und dann sagen wir, der Effekt sei zufällig.[...] es kann vorkommen, daß kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen schließlich große Unterschiede in den Phänomenen erzeugen. Ein kleiner Fehler zu Anfang wird später einen großen Fehler zur Folge haben. Vorhersagen werden unmöglich, und wir haben ein zufälliges Ereignis.“

Diese für die klassische, durch die großen Erfolge der Mechanik deterministisch geprägte Naturwissenschaft gravierende Einsicht wurde auch durch die Entwicklung der Quantenmechanik zu Beginn des 20. Jahrhunderts bestätigt: Der Laplacesche Determinismus brach mit dem Heisenbergschen Unschärfepinzipp als zentralem Axiom der Quantentheorie entgültig zusammen: Denn die Unschärfere-lation besagt, daß es dem Menschen prinzipiell - und nicht nur aufgrund unausge-reifter Meßmethoden - nicht möglich ist, den Ort und den Impuls eines Teilchens gleichzeitig beliebig genau zu messen. Der Traum davon, durch exakte Kennt-

3. Chaostheoretische Grundlagen

nis aller Anfangsbedingungen eines Systems das zukünftige Verhalten bis in alle Ewigkeit vorhersagen zu können, war geplatzt.

In der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhundert stand die Entwicklung der Quantenmechanik und ihre Anwendungen in der Atomphysik im Fokus des naturwissenschaftlichen Interesses. Erst 1975 tauchte der Begriff des Chaos in der Wissenschaft wieder in Erscheinung: Eher zufällig und auch nicht ganz ernst gemeint tauchte das Wort in der Mathematik auf: In einer von J. Yorke veröffentlichten Arbeit (*Periode Three implies Chaos*) untersuchte dieser Eigenschaften von Abbildungen eines Intervalls auf sich selbst, wobei bei ganz bestimmten Anfangswerten nichtperiodisches Verhalten entstand. Beflügelt wurde die Chaosforschung dann vor allem von den wachsenden Möglichkeiten, physikalische und mathematische Probleme numerisch zu behandeln, aufgrund der immer leistungsfähiger werden den Rechneranlagen. Heute befassen sich ganze Fachgebiete mit der Erforschung von chaotischen Systemen, sei es in der Mathematik, Biologie oder der Bereich der *Computational Physics* als dritte Richtung der Physik neben den klassischen Richtungen Experimental- und Theoretische Physik.

Die Untersuchung des tropfenden Wasserhahns als chaotisches System wurde 1976 zum ersten Mal von O. E. Rössler vorgeschlagen und 1984 von R. Shaw in einer experimentellen Umsetzung veröffentlicht. Seitdem wurden zahlreiche weitere Untersuchungen an diesem System durchgeführt, und heute gehört der tropfende Wasserhahn zu den Klassikern der Chaosforschung.

3. Chaostheoretische Grundlagen

Chaotische Systeme besitzen allgemeine, für sie charakterische Eigenschaften, die man unabhängig vom konkreten physikalischen oder mathematischen Aufbau bzw. System, immer beobachten kann. Im folgenden Abschnitt werden diese Kriterien aufgeführt und erklärt, im Abschnitt über die mathematischen Grundlagen werden diese dann auch an einem recht einfachen Beispiel illustriert. Im Teil *Verschiedene Darstellungsmöglichkeiten* werden abschließend einige grundlegende Darstellungsmöglichkeiten für Meßdaten chaotischer Systeme vorgestellt.

3.1. Charakteristische Eigenschaften chaotischer Systeme

Zunächst halten wir fest, daß wir uns im weiteren ausschließlich mit deterministisch chaotischen Systemen befassen. Das bedeutet, daß diese Systeme in dem Sinne sehr wohl den klassischen Gesetzen gehorchen, als daß ihr Verhalten durch klassische (z.B. durch die Newtonschen) Bewegungsgleichungen bestimmt wird. Im Gegensatz zu den klassisch bekannten Systemen mit gut vorhersagbarem, meist periodischen Verhalten zeichnen sich chaotische Systeme jedoch dadurch

3. Chaostheoretische Grundlagen

aus, daß ihr Verhalten empfindlich von den Anfangsbedingungen und kleinsten äußeren Störungen abhängt. Während ein einfaches Fadenpendel beispielsweise für kleine Auslenkungen prinzipiell immer den gleichen Bewegungsablauf zeigt, läßt sich die Besonderheit von chaotischen Systemen am besten durch den Vergleich mit einem Billardspiel veranschaulichen: Es ist prinzipiell nicht möglich, die Kugelbewegungen bis über einige Zusammenstöße hinaus vorherzusagen oder zu berechnen, weil mit wachsender Zeit kleinste äußere Einflüsse wie Unebenheiten des Tisches bis hin zur Gravitationskraft, die der neben dem Billardtisch stehende Spieler auf die Kugeln ausübt, zu makroskopischen Konsequenzen führen. Vor genau diesem Problem steht übrigens auch die Thermodynamik, die auch keine Vorhersagen über Trajektorien einzelner Teilchen in Vielteilchensystemen (ca. 10^{23} Teilchen) macht, sondern nur statistisch begründete Aussagen über makroskopische Parameter wie Druck, Temperatur etc. trifft.

Das scheinbar selbstverständliche Kausalitätsprinzip, das besagt, daß aus annähernd gleichen Ursachen ähnliche Wirkungen resultieren, gilt in chaotischen Systemen nicht mehr. Wie gerade beschrieben, können minimale Abweichungen in Anfangs- oder Randbedingungen zu völlig verschiedenem Verhalten führen. Auffallend an chaotischen Systemen ist auch der fließende Übergang von regulärem, periodischem zu nicht mehr vorhersagbarem Verhalten. Es gibt viele Systeme, die sich bei bestimmten Werten sogenannter Kontrollparameter absolut periodisch verhalten, während sie unter anderen Bedingungen in Chaos abdriften. Diese Übergänge ins Chaos finden vor allem auf drei verschiedenen Routen statt, auf die im weiteren noch genauer eingegangen wird: durch Bifurkationen (Periodenverdopplungen), Intermittenz (abwechselndes reguläres und irreguläres Verhalten) und über sog. seltsame Attraktoren.

Als weiteres erstaunliches Charakteristikum chaotischer Systeme ist die Tendenz solcher Systeme zu nennen, mitten im unüberschaubaren Chaos Ordnungsstrukturen hervorzubringen, mit denen man nicht rechnet. Im Gegensatz zum Übergang von Ordnung zu deterministischem Chaos hin, wie der Begriff Chaos ja impliziert, stellt man ihn vielen Fällen fest, daß sich aus der hohen Komplexität (oft spontan) einfache übergeordnete Strukturen ausbilden. Solche Übergänge werden als Antichaos bezeichnet. Ein Beispiel für ein derartiges System stellen die Heckwellen eines fahrenden Bootes dar. In Abhängigkeit von der Geschwindigkeit entstehen stabile Wirbelmuster. Diese Art von geordneten Strukturen bei ständigem Durchfluß von Materie und Energie nennt man *dissipative Strukturen*, die Entstehung von solchen Ordnungsmustern *Selbstorganisation*. Gerade in der Biologie findet man eine Vielzahl faszinierender Systeme, in denen sich aus einer riesigen Zahl von kleinsten Bausteinen wie zum Beispiel Milliarden von Zellen ein großes übergeordnetes System herausbildet wie der komplexe menschliche Körper.

3.2. Mathematische Grundlagen

Ein mathematisch noch recht einfaches Beispiel, an dem man aber schon viele typische Merkmale von Chaos erkennen kann, ist die *logistische Abbildung*. Die logistische Abbildung ist gegeben durch folgende Abbildungsvorschrift:

$$x_{n+1} = f_r(x_n) = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n) \quad (1)$$

Sie wurde schon 1845 von P. F. Verhulst eingeführt, um das Wachstum einer Population in einem abgeschlossenen Gebiet zu simulieren. Die Anzahl von Lebewesen x_{n+1} im Jahr $n+1$ ist proportional zu Anzahl der Lebewesen im vorigen Jahr x_n (Vermehrung) und zur verbleibenden Fläche $(1 - x_n)$, wobei der Parameter r von der Geburtenrate, der Größe des Gebiets usw. abhängt. Dieselbe Gleichung ergibt sich auch bei anderen Modellen, z. B. aus der Wirtschaft, aber auch bei dem von uns untersuchten Wasserhahn stellt sich ein Tropfverhalten ein, dass ähnlich dem durch diese logistische Gleichung beschriebenen Verhalten ist. Aufgrund der Rückkopplung könnte man erwarten, daß sich die Population zu einem festen Wert hin entwickelt. Tatsächlich ist das Verhalten jedoch komplizierter und wird bei großen Werten für r sogar chaotisch.

Mathematisch und auch physikalisch interessant sind nun die Anzahl und Lage der Fixpunkte dieser Abbildung. Es stellt sich die Frage für welche Werte von x $f(x)=x$ gilt. Hat man einen solchen Fixpunkt x gefunden, so ist klar, daß man bei weiteren Iterationsschritten diesen Fixpunkt nicht mehr verläßt. Spannend ist immer die Frage, was passiert, wenn man sich bei einem Wert $x \pm \delta$ nahe einem Fixpunkt x befindet: Entfernt man sich in den nächsten Iterationsschritten wieder von diesem (\rightarrow *instabiler Fixpunkt*) oder steuert man langfristig nach sehr vielen ($n \rightarrow \infty$) Iterationsschritten auf diesen zu? (Die Untersuchung dieser Stabilitätseigenschaften eines Fixpunkts führt man auf die Betrachtung der sog. Ljapunov-Exponenten zurück.)

Hat man eine solche Abbildungsvorschrift $f(x)$ gegeben, dann kann man mathematisch zeigen, daß ein Fixpunkt p mit $f(p) = p$ stabil ist, wenn $|\frac{d}{dx}f(p)| < 1$ gilt und daß er für $|\frac{d}{dx}f(p)| > 1$ instabil ist.

Bei der logistischen Abbildung kann man folgende Fälle unterscheiden:

- $r < 1$: Dies bedeutet, daß von einem Jahr zum anderen mehr Lebewesen sterben als neu geboren werden, die Population stirbt aus.

Mathematisch gesehen hat die Abbildung $f(x)$ nur einen Fixpunkt bei $x = 0$ (Schnittpunkt vom Graph $(x, f(x))$ mit der Geraden (x,x) (siehe Abb.1). Dieser Fixpunkt ist stabil, da $\frac{d}{dx}(0) = r < 1$ ist.

3. Chaostheoretische Grundlagen

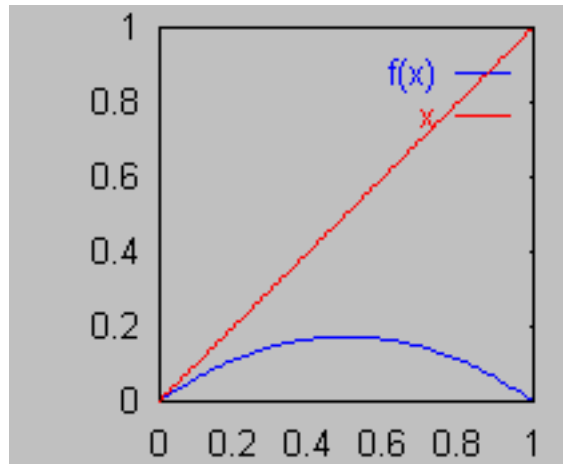


Abbildung 1: Logistische Abbildung für $r < 1$

- $1 < r < 3$: Nun hat die logistische Abbildung (siehe Abb.2) zwei Fixpunkte, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1 - 1/r$, wobei der bei 0 instabil ist und der bei x_2 stabil, da $|\frac{d}{dx}f(x^*)| = 2 - r < 1$.

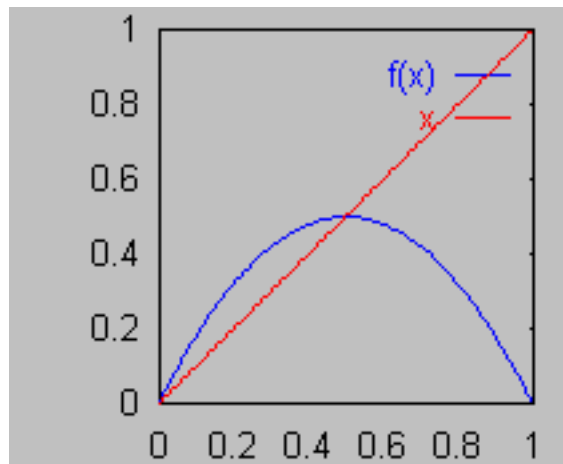


Abbildung 2: Logistische Abbildung für $1 < r < 3$

- $r > 3$: In diesem Bereich wird die Dynamik wesentlich komplizierter. Es gibt dramatische Veränderungen. Auch hier sind die Punkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 1 - 1/r$ noch Fixpunkte, jedoch mit abstoßendem Charakter. Hier gibt es jetzt jedoch auch Fixpunkte der Periode 2, das heißt es gibt zwei Punkte auf der Funktion, auf die man immer wieder abwechselnd gelangt. Um diese zu finden, muß nun die Funktion $f_2(x) := f(f(x)) = r x (1 - x) (1 - rx(1 - x))$ untersucht werden. Man muß also die Gleichung $f_2(x) = x$ lösen.

3. Chaostheoretische Grundlagen

Es ergeben sich zwei reelle voneinander verschiedene Lösungen für $r > 3$. Wenn r sogar größer als $1 + \sqrt{5} = 3,449\dots$ wird, gibt es Fixpunkte der Periode 4. Es hat also eine Periodenverdopplung stattgefunden.

Dieses Prinzip der Periodenverdopplung bei Veränderung eines sog. *Kontrollparameters* ist ein allgemeines Phänomen und klassifiziert wie schon oben beschrieben einen der Wege von periodischem zu chaotischem Verhalten. Verändert man den Kontrollparameter weiter, so beobachtet man weitere Periodenverdopplungen (4 Frequenzen, dann 8 Frequenzen), bis das System dann schließlich nicht mehr ein diskretes Frequenzspektrum besitzt, sondern sich völlig chaotisch verhält. Feigenbaum ist es gelungen, zu zeigen, daß die Route ins Chaos, die man bei der eben untersuchten logistischen Abbildung findet, die sog. *Feigenbaum-Route* nicht an diese spezielle Form der Abbildung, wie sie durch die oben definierte Gleichung gegeben ist, gebunden ist. Dabei kann man gewisse universelle Parameter finden, die sog. *Feigenbaumkonstanten* α , δ , ... die in allen solchen Systemen auftreten und dann nur noch von der Ordnung des Maximums der Abbildung (hier quadratisch) abhängen. Da die Voraussetzungen für das Auftreten der Feigenbaum-Route recht schwach sind, hat man diesen Weg ins Chaos in vielen nichtlinearen Systemen beobachtet.

Wie sieht es bei solchen Systemen, die wie das von der logistischen Abbildung beschriebene über Periodenverdopplungen ins Chaos gelangen, mit der Frage aus, ob aus ähnlichen Anfangs- oder Randbedingungen auch ähnliches mittel- und langfristiges Verhalten resultiert. Wie wir eben bei der Diskussion der verschiedenen Wertebereiche des Kontrollparameters r gesehen haben, hat das System für $1 < r < 3$ (also z.B. $r = 2,95$) einen stabilen Fixpunkt, während für $r > 3$ (z.B. $r = 3,05$) Fixpunkte der Periode 2 entstehen. Man sieht an diesem einfachen Beispiel sehr deutlich, daß chaotische Systeme auf sehr kleine Änderungen eines äußeren Parameters äußerst empfindlich reagieren können, wie hier, wo bei einer minimalen Variation des r -Wertes ein grundlegend verschiedenes Verhalten auftritt.

Wie schon erwähnt, setzt sich der Weg der Periodenverdopplungen (Bifurkationen) nicht beliebig fort. Ab einem bestimmten Wert des Kontrollparameters (bei der logistischen Abbildung $r_\infty = 3,5699\dots$) befindet sich das System in einem chaotischen Bereich. Doch es ist erstaunlich, daß das System nicht völlig im Chaos versinkt, denn man kann zwei interessante Effekte beobachten: Zum einen stellt man fest, daß es eine Art von Fenstern gibt (also bestimmte Intervalle für den Parameter r) im chaotischen Gebiet, in denen sich das Verhalten wieder auf einige wenige diskrete Frequenzen reduziert, zum andern gelingt es durch bestimmte graphische Verfahren, die speziell zur Analyse chaotischer Systeme entwickelt wurden, doch noch Strukturen der Ordnung im auf den ersten Blick unüberschaubaren Chaos zu entdecken, die sog. *seltsamen Attraktoren*.

3. Chaostheoretische Grundlagen

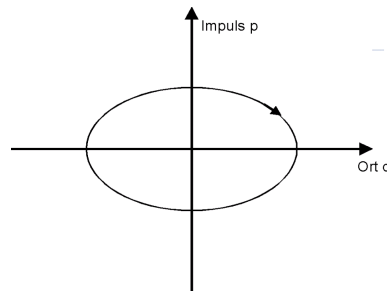


Abbildung 3: Der ungedämpfte harmonische Oszillator

3.3. Verschiedene Darstellungsmöglichkeiten

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die allgemeinen Charakteristika chaotischer Systeme erläutert und am Beispiel der logistischen Abbildung diskutiert wurden, werden in diesem Teil nun die wichtigsten Darstellungsverfahren für das Verhalten chaotischer Systeme vorgestellt.

3.3.1. Phasenraum und Attraktoren

Zunächst ist es sehr nützlich, sich den Begriff des Phasenraums, der auch in der klassischen Mechanik eine große Rolle spielt, noch einmal zu vergegenwärtigen: Der Zustand eines physikalischen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt ist durch die Angabe eines vollständigen Variablenssatzes genau beschrieben. In der analytischen Mechanik kann dies zum Beispiel durch Angabe der Orte und Impulse der N Teilchen geschehen:

$$\text{Zustand des Systems} \Leftrightarrow f = f(r_1, \dots, r_N, p_1, \dots, p_N, t).$$

Genau dieses Verfahren kann man zur grafischen Veranschaulichung dynamischer Abläufe verwenden.

Der eindimensionale, ungedämpfte, nicht angeregte harmonische Oszillator beispielsweise wird ja durch die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

beschrieben. Die Gesamtenergie H ist erhalten und man kann nun zu einem bestimmten Wert für den Ort q den zugehörigen Impuls p berechnen. Der im realen Raum hin- und herschwingende Oszillator wird im Phasenraum, in dem die eine Achse für den Ort q und die andere für den Impuls p steht, dann durch eine Ellipse dargestellt (siehe Abb.3).

Ein gedämpfter harmonischer Oszillator dagegen wird nicht ewig auf dieser Ellipsenbahn im Phasenraum kreisen, denn durch die Dämpfung nimmt in jeder Periode die Amplitude ab, bis der Oszillator schließlich in der Ruhelage zum

3. Chaostheoretische Grundlagen

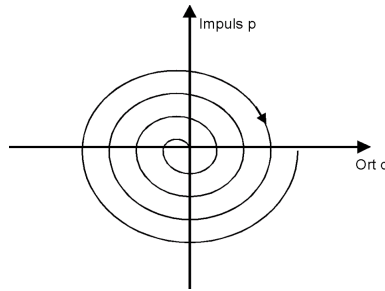


Abbildung 4: Harmonischer Oszillator mit Dämpfung

Stillstand kommt. Im Phasenraum-Diagramm äußert sich dies darin, daß die Bahnkurve (*Trajektorie*) keine Ellipse mehr ist, sondern eine spiralförmige Bahn, die sich immer mehr dem Ursprung nähert (siehe Abb.4).

Der Ursprung ist im Falle des gedämpften Oszillators offenbar der Punkt im Phasenraum, dem alle Trajektorien, unabhängig von ihrem Startpunkt, entgegenlaufen und in den alle Kurven schließlich einmünden. Dieser Punkt ist ein Beispiel für einen stabilen Fixpunkt, da ein System, das in einem Zustand nahe diesem Fixpunkt ist, auf diesen zuläuft und diesen auch bei kleineren Störungen nicht mehr verläßt, wenn es einmal dort angekommen ist. (Ein Pendel, das in der Ruhelage ist, bleibt dort und kehrt auch dorthin zurück, wenn man es leicht auslenkt.)

Als drittes Beispiel für eine Trajektorie im Phasenraum kann man den leicht angeregten harmonischen Oszillator mit geringer Dämpfung betrachten. Nach einer gewissen Einschwingzeit schwingt das System mit der Erregerfrequenz gleichmäßig hin und her (ähnlich wie der ungedämpfte, nicht angeregte Oszillator). Im Phasenraumbild erkennt man dieses Verhalten daran, daß die Trajektorie von einem beliebigen Punkt aus beginnend sich mit der Zeit immer mehr einer Ellipsenbahn nähert. In diesem Fall gibt es also keinen einzelnen Fixpunkt, sondern eine Grenzkurve, der sich die Trajektorie des Systems für große Zeiten nähert. Solche Grenzkurven und Fixpunkte bezeichnet man allgemein als *Attraktoren*, da die Bahnkurven im Phasenraum auf die Dauer von diesen Attraktoren sozusagen angezogen werden.

Das eigentlich Spannende ist nun, daß auch in chaotischen Systemen solche Grenzkurven beobachtet werden können. Diese haben dann nicht mehr die Form einzelner Punkte oder einer festen klaren Kurve wie obige Ellipsenbahn, sondern sind verschwommene, aber dennoch räumlich abgegrenzte Strukturen. Solche komplizierten Grenzkurven nennt man *Seltsame Attraktoren*. Ein berühmtes Beispiel für einen seltsamen Attraktor ist der *Hénon-Attraktor* (siehe

3. Chaostheoretische Grundlagen

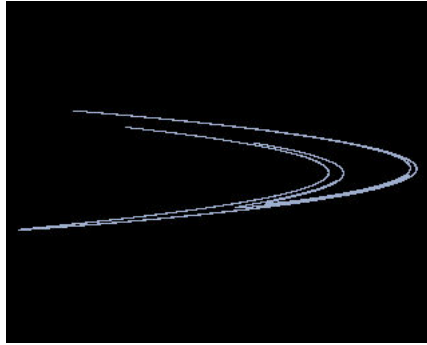


Abbildung 5: Der Hénon-Attraktor

Abb.5). Er entsteht aus der Hénon-Abbildung, die als eine zweidimensionale Erweiterung der logistischen Abbildung betrachtet werden kann und die den folgenden beiden Gleichungen genügt:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \quad (2)$$

$$y_{n+1} = bx_n \quad (3)$$

3.3.2. Feigenbaum-Diagramm und Delay-Abbildung

Eine weitere sehr wichtige und weit verbreitete Darstellungsform für Daten von chaotischen Systemen ist das *Feigenbaum-Diagramm* (siehe Abb.6). Diese Art der Darstellung ist dann geeignet, wenn ein System über die Feigenbaum-Route von periodischem zu chaotischem Verhalten übergeht. Auf der einen Achse des Diagramms wird der Kontrollparameter des Systems aufgetragen, d. h. zum Beispiel der r -Wert im Falle der logistischen Abbildung, darüber aufgetragen werden die Frequenzen, die das System bei einem gewissen Kontrollparameter hat. Bei einem System, das bei einem niedrigen Wert des Kontrollparameters zum Beispiel nur mit einer Frequenz „schwingt“ und bei Erhöhung des Kontrollparameters in einen Modus mit zwei verschiedenen Frequenzen übergeht, sieht man dieses Periodenverdopplungsverhalten daran, daß der Graph im Feigenbaum-Diagramm in zwei Teilkurven aufspaltet.

Wie schon oben in der Analyse der logistischen Abbildung erwähnt, erkennt man auch in dem rechten Teil des Diagramms, daß es schmale Bereiche gibt, in denen mitten im chaotischen Bereich wieder einfaches Verhalten mit einigen wenigen, diskreten Frequenzen gibt.

In unserem Experiment war der Kontrollparameter die Durchflußrate, also die Menge an Wasser, die in einer bestimmten Zeit durch das Röhrchen tropft. Wir

3. Chaostheoretische Grundlagen

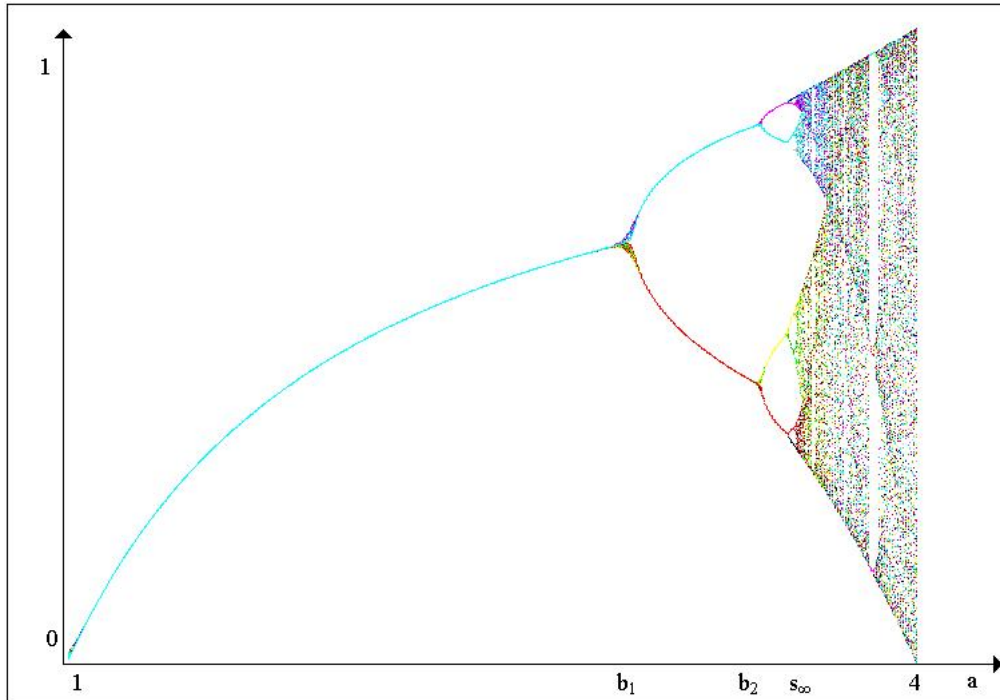


Abbildung 6: Feigenbaum-Diagramm

haben untersucht, in welchem Bereich wieviele Frequenzen zu beobachten sind.

Eine weitere, sehr nützliche Darstellungsform für Meßdaten von chaotischen Systemen ist die sog. *Delay-Abbildung*. Man unterscheidet zwischen der zwei- und der dreidimensionalen Delay-Abbildung. Wenn man eine Reihe von Meßdaten hat, faßt man zwei bzw. drei nebeneinander liegende Meßpunkte zu einem Zahlendublett bzw. -tripel zusammen. Faßt man die drei Zahlen eines solchen Tripels als x-, y- und z-Koordinate auf, kann man das Zahlentripel als einen Meßpunkt in einem dreidimensionalen Schaubild darstellen. Je nach Verhalten des Systems erhält man dann unterschiedliche Schaubilder: Tropft der Wasserhahn z.B. nur mit einer Frequenz, dann haben sind die Zeitabstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tropfen annähernd gleich groß. Als Meßdaten-Dublett erhält man dann iterativ folgende Zahlenpaare:

$$p_1 = (\Delta t_{1..2}, \Delta t_{2..3}) \quad (4)$$

$$p_2 = (\Delta t_{2..3}, \Delta t_{3..4}) \quad (5)$$

$$\dots \quad (6)$$

$$p_N = (\Delta t_{N..N+1}, \Delta t_{N+1..N+2}) \quad (7)$$

$$\dots \quad (8)$$

In einem zweidimensionalen Schaubild ist dies dann bei gleichmäßigem einfre-

3. Chaostheoretische Grundlagen

quenten Tropfrhythmus eine um einen Punkt angehäufte Punktwolke. Besteht das Verhalten des Systems aus mehreren diskreten Frequenzen, erhält man entsprechend mehrere solche Häufungspunkte im Schaubild.

Selbstverständlich hängt es vom speziellen Aufbau des untersuchten Systems ab, wie genau man die Frequenzen und andere interessante Eigenschaften aus den Meßreihen gewinnt und am günstigsten grafisch aufbereitet.

4. Versuchsdurchführung

4.1. Versuchsaufbau

Damit der Wasserdruck konstant bleibt, darf das tropfende System nicht direkt an die Hauswasserleitung angeschlossen werden. Wir haben eine Vorratsflasche (wie sie z.B. für destilliertes Wasser im Labor benutzt wird) am unteren Ende aufgeschnitten, sodaß überschüssiges Wasser (aus der Hauswasserleitung) abfließen kann. Um dieses zu verbessern, wurde mittels Klebestreifen eine Ablaufrinne gebastelt. Die Spritzflasche wird verkehrt herum mit einer Klemme am Gestänge über dem Waschbecken befestigt. Am Plastikrohr der Flasche wird ein weicher Silikonschlauch als Zuleitung zum tropfenden System benutzt. Im Verlauf des Schlauchs ist eine Schlauchklemme mit einer Stellschraube angebracht, um den Wasserdurchfluß zu regulieren. Auch diese ist mit einer Klemme am Gestänge hinter dem Waschbecken befestigt.

Das tropfende System selbst ist ein Messingröhrchen mit 0,5 cm Innenradius. Um den Durchfluß weiter zu dämpfen, ist in diesem Röhrchen ein Filz mittels einem Faden befestigt. Dieses Röhrchen ist an einem extra Gestänge befestigt, um Schwingungen vom System abzuhalten. Über den Silikonschlauch werden kaum Schwingungen übertragen.

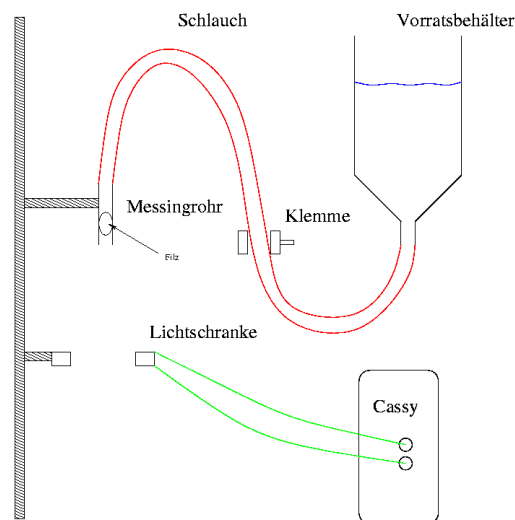


Abbildung 7: Prinzipieller Aufbau des Versuchs

Einige Zentimeter unter dem Messingröhrchen ist eine Lichtschranke angebracht, mit der die Zeitabstände der Wassertropfen gemessen werden. Diese ist an eine externe Spannungsquelle angeschlossen. Die Meßleitung geht über ein BNC-Kabel zum Cassy-System, welches an einen PC angeschlossen ist. Außer-

4. Versuchsdurchführung

dem haben wir noch einen Digitalzähler angeschlossen, um eine Kontrolle des Systems zu haben.

Um die Durchflußmenge zu messen, wird unter das tropfende System noch ein großes 2 l Becherglas gestellt, um nach einer bestimmten Zeit (Stoppuhr) die Wassermenge abzuwiegen.

In einem parallelen Versuch wird ein stetiger Druckabfall durch ein langes Glasrohr (1,20 m, Innendurchmesser 1cm) erzeugt. An diesem ist wie im anderen Versuch der Schlauch mit dem Messingröhrchen angebracht. Auch hier wird mit der Lichtschranke (hier mit Timer-Cassy) die Zeitabstände gemessen.

4.2. Durchführung

Um ein Feigenbaumdiagramm aufzunehmen, kann man auf zwei Arten vorgehen. Zum einen kann man den Wasserdruck kontinuierlich abfallen lassen, indem man das Glasrohr ohne Zulauf benutzt und damit alle Durchflußraten automatisch durchgehen. Dabei gibt es aber nie einen Einschwingvorgang und Meßfehler können nur durch häufiges Wiederholen der Messung herausgerechnet werden. Trotzdem haben wir auch eine Versuchsreihe zu dieser Art der Messung gemacht, um einen Vergleichsgraphen zu erzeugen.

Der zweite Weg ist es, für viele verschiedene (zeitlich konstante) Durchflußmengen eine Messung der Frequenzen über einen längeren Zeitraum (bei uns einige Minuten) zu messen. Diese können dann hinterher so ausgewertet werden, das alle vorkommenden Zeitabstände (oder sogar nur die sehr häufigen) herausgelesen werden können und als Punkte des Feigenbaumdiagramms eingetragen werden können. Die unterschiedlichen Durchflußraten können durch die Stell-schraube an der Schlauchklemme oder die Höhe des Wassertanks und damit des Wasserdrucks reguliert werden. Leider konnten wir keine wirkliche Langzeitmessung durchführen, da Cassy nicht in der Lage war diese zu erfassen.

Die Durchflußmenge selbst wird nach einer abgestoppten Zeit gemessen, indem das aufgefangene Wasser abgewogen wird. Im Prinzip kann man dann sogar auf die Größe der einzelnen Tropfen zurückrechnen.

4.2.1. Cassy

Cassy kann mit dem Timer-Modul im Prinzip Zeiten bis zu 1 ms auflösen und es zeigt dies auch so an. Da aber das Cassy keine durchgehende Zeitmessung machen kann (es kann nur jede zweite Periodendauer messen), geht diese Genauigkeit schnell unter. Vermutlich ist die Software nur dazu ausgelegt, eine durchschnittliche Periodendauer eines unbeschleunigten Systems zu messen. Dadurch gehen sehr viele Meßwerte verloren, was unter Umständen zu einem Informationsverlust führt (im Gegensatz zu einer Messung bei der nur Mittelwerte gemessen werden sollen).

4. Versuchsdurchführung

Das Problem ist die von Leybold mitgelieferte Software. Dieses Problem hätte man durch ein selbstgeschriebenes Programm lösen können (Leybold stellt Delphi Komponenten zur Verfügung). Da wir uns aber erst gegen Ende des Semesters dieser Problematik bewusst wurden, konnte dies aus Zeitgründen nicht mehr durchgeführt werden.

Alle unsere Messungen hatten bis zu dahin keine Vollständigkeit, zum Teil fehlten einfach Messwerte, zum Teil brachen wir die Messungen wegen der mangelnden Voraussetzungen (z.B. deutlich sichtbare Fehler der Messung) ab.

Deswegen entschieden wir uns nach langem Überlegen zur Messung ohne die Timer-Box, d.h es wurde eine Messung gemacht bei der die Spannungsflanken der Lichtschranke kontinuierlich abgefragt wurden. An der Lichtschranke wird einfach periodisch die Spannung gemessen, welche bei Unterbrechung von -5 V auf 0 V geht. Aber auch hier macht Cassy einige Probleme, da es prinzipiell nur 16000 Werte messen kann (begrenzter Speicher ?). Da man bei einer Auflösung von einer Millisekunde nur 16 Sekunden lang messen kann, mußten wir hier einen Mittelwert zwischen Meßauflösung und Meßdauer finden. Wir entschieden uns für eine Auflösung von 5 ms , was zu 80 Sekunden langen Meßblöcken führt. Durch Messen mehrerer Blöcke mit 80 s nacheinander, die in der Auswertung miteinander verrechnet werden, kann man ein mehr oder weniger befriedigendes Ergebniss erzielen. Obwohl das die wesentlich genauere Meßmethode (da Cassy in diesem Fall bis zu einer Auflösung von $5\mu\text{s}$ genau messen kann) ist, ist es doch die viel umständlichere, da die Auswertung in diesem Fall deutlich aufwendiger ist.

Um längere Zeiten zu erzielen, werden einfach 3 oder 4 Messungen nacheinander durchgeführt und in separaten Dateien abgespeichert.

5. Auswertung

5.1. Messungen mit konstanter Durchflußmenge

Alle Messungen, die mit dem Timer-Modul gemessen wurden, sind in einer ersten Grobauswertung kaum zu gebrauchen. Daher werden sie aus Zeitgründen außen vorgelassen.

Insgesamt hatten wir über 30 MB an Daten aus den Messungen ohne Timer-Modul. Dies sind je 3 Meßreihen zu 32 verschiedenen Durchflußmengen. Um eine so große Menge an Daten zu verarbeiten, mußten wir zuerst einige geeignete Scripte und Programme schreiben, die uns bei der Auswertung halfen. Diese Helfer wurden in der Scriptsprache Perl, mit dem Unix Programm awk und einem C Programm realisiert.

Aus den lab-Dateien von Cassy mußten zuerst die von uns benötigten Datenreihen extrahiert werden. Da bei den 16000 (genaugenommen 16001) Meßwerten viele dabei sind, bei denen kein Tropfen die Lichtschranke unterbrochen hat (-5 V), müssen die echten Ereignisse herausgefiltert werden. Da die Zeiten, die von Cassy gemessen werden, absolute Zeiten d.h. sie sind vom Messungsbeginn an gezählt, (im Gegensatz zur Messung mit dem Timermodul) muß die Differenz der Zeiten zweier benachbarter Ereignisse gebildet werden.

Um die Daten mit gnuplot in Schaubilder zu verwandeln, wird mittels Script eine Datei gebildet. Da wir unter anderem auch chaotische Attraktoren im dreidimensionalen Erzeugen wollten (in den chaotischen Bereichen) werden in die Datei die Zeitdifferenzen als Triple (in drei Spalten) gespeichert.

Um ein Feigenbaumdiagramm zu erstellen mußten wir nun aus den verschiedenen Meßreihen (also den verschiedenen Werten der Durchflußmenge) die jeweils vorkommenden Frequenzen herauslesen. Da dies sehr schwer automatisch durchzuführen ist, wird zuerst jede Reihe einzeln geplottet, um daraus die vorkommenden Frequenzen visuell zu bestimmen. Dies wird mit [Abbildung 8](#) veranschaulicht.

Alle herausgelesenen Periodendauern aller Durchflußmengen werden dann nach umrechnen zu Frequenzen in einem neuen Plot ([Abbildung 9](#)), dem eigentlichen Feigenbaumdiagramm, ausgegeben. In diesem Plot sind die Frequenzen, die bei allen Reihen sehr deutlich zu sehen sind durch eine Verlaufslinie hervorgehoben, das heißt man sieht eine Aufspaltung in zwei deutliche Frequenzzweige. Über die anderen Punkte im Diagramm ist es schwer eine Aussage zu machen und sie durch Trendlinien zu verbinden, weshalb wir uns auf die zwei Hauptlinien beschränkten.

Siehe dazu Tabelle in [A](#).

Beim Herauslesen der Frequenzen kann man durchaus Frequenzen übersehen, da sie noch nicht deutlich genug hervortreten. Dies ließe sich durch deutlich mehr Messungen bei einer Durchflußmenge (eine zeitlich längere Messung, bei uns also realisiert durch mehr 80-Sekunden-Messungen), da dann auch undeutliche Frequenzen mit der Zeit zum Vorschein kommen würden.

Die Frequenzen oder Periodendauern kann man auch noch in einer anderen

5. Auswertung

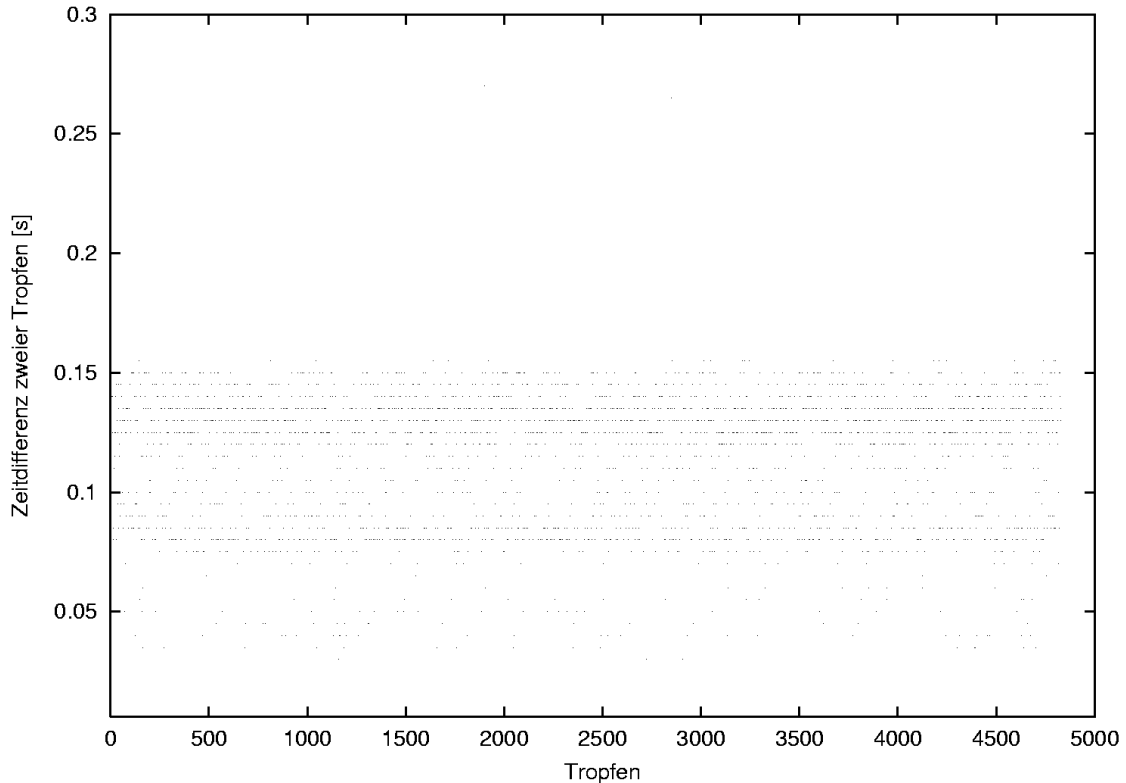


Abbildung 8: Herauslesen der Frequenzen aus Reihe 6 mit einer Durchflußmenge von $0.886 \frac{g}{s}$

Art darstellen. Man bildet aus je zwei (oder für ein dreidimensionales Schaubild drei) aufeinander folgenden Zeitabständen Wertepaare (jeder Wert ist zuerst y-Koordinate und danach x-Koordinate) und trägt diese x-y-Wertepaare in ein Schaubild ein. Man sieht Punktwolken an den Koordinaten häufig vorkommender Paare. Bei chaotischen Zuständen kann man dann den Attraktor des Systems darstellen.

Für eine solche Darstellung im dreidimensionalen haben wir zu wenig Messwerte, aber im zweidimensionalen sieht man durchaus schon Verteilungen auf der Fläche. Dies ist hier beispielsweise für die 5. Meßreihe abgebildet (10)

5.2. Messungen mit kontinuierlichem Druckabfall

Bei den Messungen mit kontinuierlich abnehmendem Wasserdruck wurden 15 Meßreihen aufgenommen. Auch diese Daten müssen zuerst mittels Scripten umgewandelt werden, was aber bei nur 15 Dateien kein sehr großes Problem darstellt. Zur Auswertung werden diese übereinander gelegt, wodurch sich im Schaubild (Abbildung 11 die für den Wassertropfenversuch typischen Bäume, sogenannte

6. Schlußfolgerung

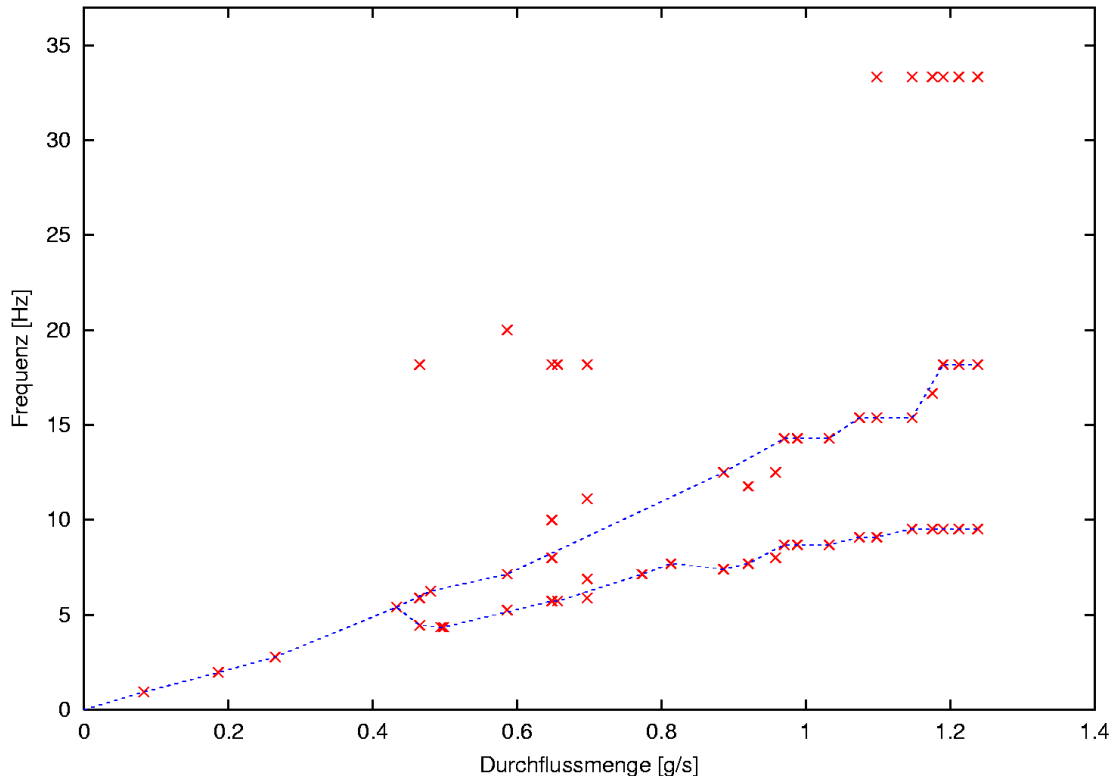


Abbildung 9: Herausgelesene Frequenzen bei verschiedenen Durchflußmengen mit Hervorhebung durchgängiger Frequenzzweige

Chaospfauen ausbilden. Man sieht im Schaubild deutlich Bereiche in denen nur eine Frequenz vorkommt und ebenso Bereiche in denen zwei oder mehr Frequenzen vorkommen.

6. Schlußfolgerung

Aus den Messungen ergeben sich ein paar schöne Kurven. In machen Bereichen ist die Datengrundlage, trotz der 30MB Daten, etwas schwach. Die Lösung wäre ein programmierbares Modul, mit dem man gleich die richtigen Daten hätte aufnehmen können. Ohne dieses war die Rohdatenmenge wesentlich größer, als die Menge der verarbeiteten Daten. Hier empfiehlt sich vielleicht ein programmierbares (Delphi) Modul für den Einsatz im Projektpraktikum.

Insgesamt eignet sich der Wassertropfen Versuch sehr gut dazu sich einen Einblick in die Chaosforschung zu verschaffen. Die üblichen Darstellungsformen der Chaosforschung lassen sich hier relativ gut ausprobieren. In Anbetracht dessen, daß sich das Chaos nahezu überall finden lässt eine spannende Angelgenheit.

6. Schlußfolgerung

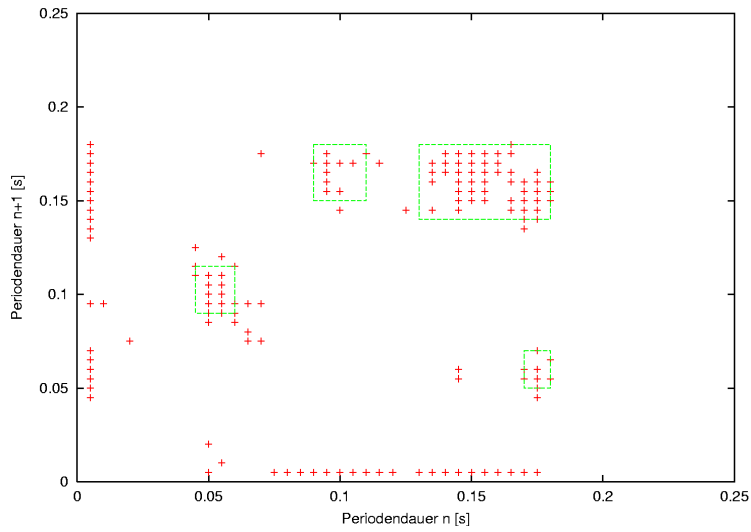


Abbildung 10: Zweidimensionale Darstellung von Meßreihe 5 mit Hervorhebung der vier Anhäufungen

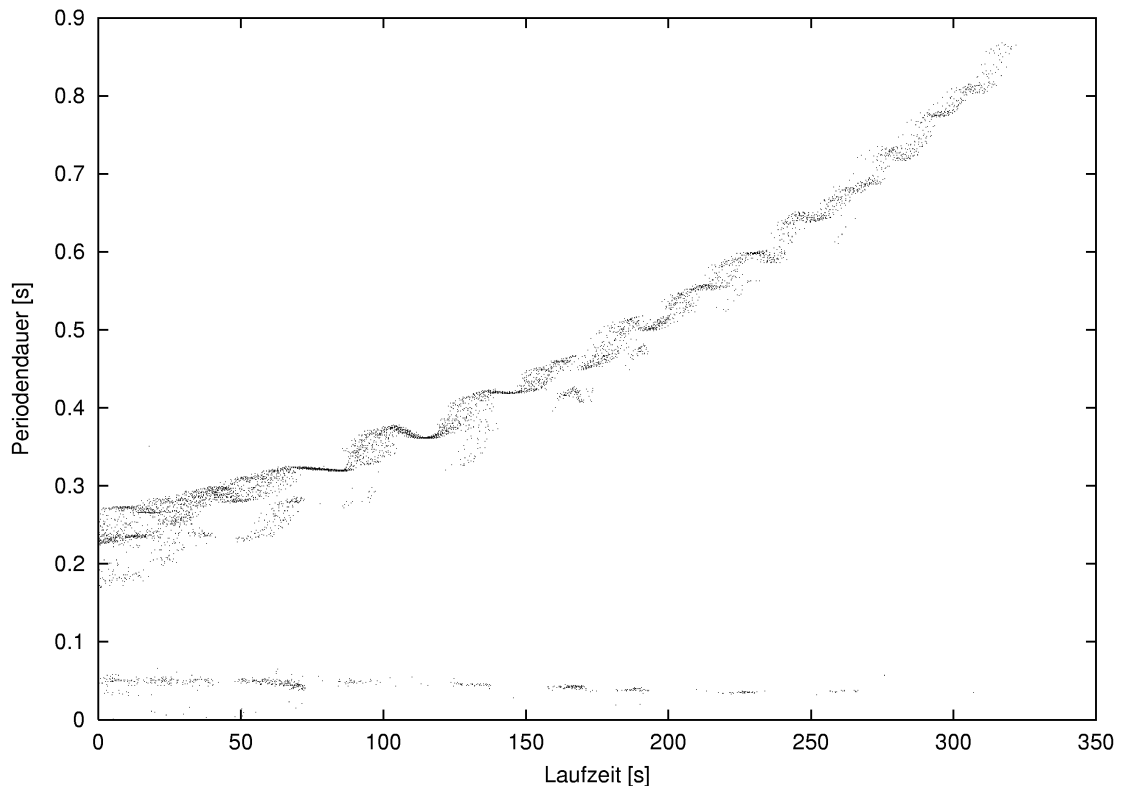


Abbildung 11: Zeitabstände der Tropfen bei kontinuierlich abnehmendem Wasserdurchfluß

A. Meßreihen

A. Meßreihen

Reihe	Durchflußmenge [$\frac{\mu}{s}$]	Frequenzen [Hz]
1	0.083	0.93
2	0.265	2.77
3	0.433	5.40
4	0.480	6.25
5	0.697	5.88 , 6.89 , 11.11 , 18.18
6	0.886	7.40 , 12.50
7	0.988	8.69 , 14.28
8	1.212	9.52 , 18.18 , 33.33
9	0.813	7.69
10	1.190	9.52 , 18.18 , 33.33
11	0.494	4.34
12	0.586	5.26 , 7.14 , 20.00
13	0.186	1.96
14	0.465	4.44 , 5.88 , 18.18
15	0.831	7.40
16	1.175	9.52 , 16.66 , 33.33
17	1.238	9.52 , 18.18 , 33.33
18	0.743	7.14 , 10.00
19	0.656	5.71 , 18.18
20	0.958	8.00 , 12.50 , 13.33
21	0.920	7.69 , 11.76
22	0.970	8.69 , 14.28
23	0.773	7.14
24	0.498	4.34
25	1.074	9.09 , 15.38
26	0.648	5.71 , 8.00 , 10.00 , 18.18
27	1.032	8.69 , 14.28
28	1.098	9.09 , 15.38 , 33.33
29	1.113	11.76
30	1.147	9.52 , 15.38 , 33.33
31	0.836	7.69 , 9.09
32	0.528	5.00 , 6.89

Tabelle 1: Durchflußmengen und Frequenzen der Meßreihen

Literatur

- [1] www.brg-traun.ac.at/IAAC/gmunden/chaostheorie *Artikel von Gerhard Rath*
- [2] *Spektrum der Wissenschaft: Chaos und Fraktale, Spektrum der Wissenschaft in Heidelberg, 1989*

Autoren

- Markus Beyer, maku@gmx.net
- Moritz Bubek, bubek@gmx.de
- Pascal Frank, pascal.frank@uni-konstanz.de
- Markus Müller, muelli@epost.de
- Tim Thomay, tim@thomay.de
- Daniel Träutlein, daniel.traeutlein@uni-konstanz.de