

1 Das frühe Universum

- die Zeit ungefähr vor der ersten 10^{-6} Sekunde wird hier nicht beschrieben,
- Start bei einer Temperatur von $T \approx 10^{13}$ K, also ca. $1\mu s$ nach dem Urknall.
- alle Teilchen mit Massen größer der Neutron-Masse sind zerstrahlt
- da die Temperatur so weit gesunken ist, können sie auch nicht mehr erzeugt werden, da mindestens ihr Massenäquivalent an Energie vorhanden sein muß.
- die Temperatur darf nicht unter eine Schwelle fallen
 $k_B T = mc^2 \rightarrow T \geq \frac{mc^2}{k_B}$
- durch die Ausdehnung des Universums wird es kälter, weshalb dann bestimmte Teilchen nicht mehr erzeugt werden können.
- aus den benötigten Temperaturen können nun die Zeitpunkte, die Energiedichte und die Teilchendichte der weiteren Ereignisse im Universum berechnet werden.

zu Beginn der Hadronen-Ära, also der Zeit in der es noch heiß genug ist, um Hadronen zu erzeugen besteht das Universum aus folgendem Substrat:

	Masse $\left[\frac{MeV}{c^2}\right]$	Spin	Beitrag zu x	Teilchenart
Hadronen:				
p^+, p^-, n, \bar{n}	≈ 939	$1/2$	1	Fermionen
π^+, π^-, π^0	≈ 139	0	$1/2$	Bosonen
Leptonen:				
μ^+, μ^-	105	$1/2$	1	Fermionen
e^+, e^-	0.51	$1/2$	1	Fermionen
ν_τ, ν_μ, ν_e	0	$1/2$	$1/2$	Fermionen
$\bar{\nu}_\tau, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_e$	0	$1/2$	$1/2$	Fermionen
Photon:				
γ	0	1	1	Boson

1.1 Theoretische Wiederholung

1.1.1 Zeitgesetz

Um die Zeit, die seit dem Urknall vergangen ist zu berechnen mu man zwischen strahlungsdominiertem und materiedominiertem Universum untescheiden.

$$\text{für } \rho_{\text{Strahlung}} > \rho_{\text{Materie}} : t = \sqrt{\frac{3c^2}{32\pi G x \sigma T^4}} \quad (1.1)$$

$$\text{für } \rho_{\text{Materie}} > \rho_{\text{Strahlung}} : t = \sqrt{\frac{1}{6\pi G \rho_{\text{mat}}}} \quad (1.2)$$

1.1.2 Energie- und Anzahlichten

- relativistischer Bereich des Gases, d.h. die kinetische Energie eines Teilchens durch die Temperatur ist viel größer als seine Ruheenergie:
 $k_B T \gg m_0 c^2$

– Fermionen:

Die 2 vor beiden Ausdrücken steht für die beiden Spineinstellungen der Teilchen. Bei Neutrinos, bei denen Teilchen

2 Moritz Bubek

und Antiteilchen als energetische Einheit auftreten, muß sie durch eine 1 ersetzt werden.

Anzahldichte:

$$n_F = 2 \frac{3}{2} \zeta(3) \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 = 2 \cdot 0,0913 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \quad (1.3)$$

Energiedichte:

$$u_F = 2 \frac{7}{16} \sigma T^4 \quad \text{mit } \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{15c^3 \hbar^3} \quad (\text{Stefan-Boltzma}) \quad (1.4)$$

Mittelere Energie eines Fermions:

$$\bar{E} = \frac{u_F}{n_F} = \frac{7\pi^4}{1215\zeta(3)} k_B T \approx 3,15 k_B T \quad (1.5)$$

– Bosonen

Anzahldichte:

$$n_B = 2\zeta(3) \frac{2}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 = 2 \cdot 0,12 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \quad (1.6)$$

Energiedichte:

$$u_B = 2 \frac{1}{2} \sigma T^4 \quad (1.7)$$

3 Moritz Bubek

Mittelere Energie eines Bosons:

$$\bar{E} = \frac{u_B}{n_B} = \frac{\pi^4}{30\zeta(3)} k_B T \approx 2,7 k_B T \quad (1.8)$$

- unrelativistischer Bereich des Gases, $k_B T \ll m_0 c^2$

1.1.3 *thermodynamisches Gleichgewicht*

Um im thermodynamischen Gleichgewicht zu sein, muß die mittlere Stoßzeit zwischen zwei Teilchen sehr viel kleiner als das Alter des Universums sein.

$$t_s = \frac{1}{\sigma \cdot n \cdot c} \ll t \quad (1.9)$$

mit t_s : Stoßzeit, σ : Wirkungsquerschnitt, n : Anzahldichte, t : Weltalter

1.2 Zerstrahlung der Protonen und Neutronen

$$n + \bar{n} \Rightarrow \pi^0, \pi^+ + \pi^-$$

$$p + \bar{p} \Rightarrow 2\gamma, \pi^0$$

Vor der Zerstrahlung sind noch $x = 13.5$ Strahlungsarten vorhanden, die zu dem berechneten Zeitpunkt auf $x = 13.5 - 4 = 9.5$ reduziert werden. Es bleiben noch folgende Teilchen übrig:

$$\pi^+, \pi^-, \pi^0, \mu^+, \mu^-, e^+, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau, \nu_e, \bar{\nu}_e, \gamma$$

Daraus läßt sich mittels der oben genannten Formeln, die Temperatur und den Zeitpunkt bestimmen.

$$T = \frac{m_p c^2}{k_B} = 1.1 \cdot 10^{13} K, t = 6.3 \mu s \quad (1.10)$$

Durch die bei der Zerstrahlung freiwerdende Energie verlangsamt sich die Abkühlung des Universums. Es zerstrahlen aber nicht alle Protonen und Neutronen, da es durch eine Asymetrie mehr Teilchen als Antiteilchen gibt.

1.3 Zerstrahlung der Pionen

die Energie der Ruhemasse der Pionen wird erreicht und sie zerfallen zu:

$$\pi^- \Rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$\pi^+ \Rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

$$\pi^0 \Rightarrow 2\gamma$$

$$\mu^+, \mu^-, e^+, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau, \nu_e, \bar{\nu}_e, \gamma$$

$$T = 1.6 \cdot 10^{12} K, t = 3 \cdot 10^{-5} s \quad (1.11)$$

$$x = 9.5 \rightarrow x = 8$$

Mit dem Zerstrahlen der Pionen endet die Hadronen-Ära.

1.4 Zerfall der Myonen

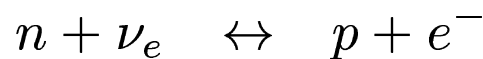
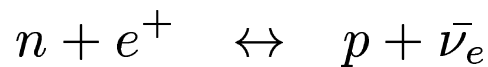
$$\begin{aligned}\mu^- &\Rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\ \mu^+ &\Rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu\end{aligned}$$

$$e^+, e^-, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau, \nu_e, \bar{\nu}_e, \gamma$$

$$T = 1.2 \cdot 10^{12} K, t = 5.5 \cdot 10^{-5} s \quad (1.12)$$

1.5 Einfrieren des $\frac{n_n}{n_p}$ -Verhältnisses

- Neutronen werden in Protonen, und Protonen in Neutronen umgewandelt
- mit abnehmender Temperatur verschiebt sich das Gleichgewicht immer mehr zu den Protonen.



- das Verhältnis der Teilchenzahldichten von Neutronen zu Protonen aus der Saha-Theorie (Zahl der e^+ , e^- und ν sehr groß)

$$a = \frac{n_n}{n_p} = \frac{g_n}{g_p} \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_n - m_p)}{k_B T} c^2} \quad (1.13)$$

- um ein Proton in ein Neutron umzuwandeln (inverser β -Zerfall, $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$) benötigen die Elektronen eine Energie von $2.5 \cdot m_e c^2$
 $\Rightarrow E \gg m_0 c^2$, d.h im relativistischen Bereich
- ist nicht mehr genügend Energie zur Erzeugung von Neutronen vorhanden ist, friert das Verhältniss aus
- die Neutronen zerfallen nach ca. 10.6 Minuten durch β -Zerfall ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) zu Protonen

- Der Zeitpunkt des Einfrierens ist die Zeit, in der ein Neutrino mit einem Neutron wechselwirkt, also die mittlere freie Weglänge $\lambda_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu n_\nu}$ zurücklegt

$$t_\nu = \frac{\lambda_\nu}{c} = \frac{1}{\sigma_\nu n_\nu c} \quad (1.14)$$

- diese Stoßzeit muß kürzer als das Alter des Universums sein

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{3c^2}{32\pi G x \sigma T^4}} \geq t_\nu = \frac{1}{\sigma_\nu n_\nu c} \quad (1.15)$$

Anzahldichte der Neutrinos: $n_\nu = 0.0913 \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$

Wirkungsquerschnitt der Neutrinos mit den Nukleonen (temperaturabhängig !): $\sigma_\nu = 2 \cdot 10^{-66} T^2 \frac{m^2}{K^2}$

- die Temperatur zum Zeitpunkt des Einfrierens

$$\sqrt{\frac{3c^2}{32\pi G x \sigma T^4}} \geq \frac{(\hbar c)^3}{c \cdot 0.0913 (k_B T)^3 \cdot 2 \cdot 10^{-66} T^2}$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{\sqrt{\frac{8\pi}{3} G x \sigma}}{0.0913} \left(\frac{\hbar}{k_B}\right)^3 \frac{2c}{\sigma_\nu}$$

nach einsetzen der Konstanten ergibt sich

$$T \geq 9.82 \cdot 10^9 \sqrt[6]{x} \quad (1.16)$$

- je nach Anzahl der Strahlungsarten, ist die Temperatur höher oder niedriger. Maximal stehen noch 6 Strahlungsarten zur Verfügung: $\underbrace{\nu_e, \bar{\nu}_e}, \underbrace{\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu}, \underbrace{\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau}, e^-, e^+, \gamma$

Eingesetzt ergibt das:

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad T = 9.8 \cdot 10^9 K, \quad t = 2.4s \quad (1.17)$$

$$x = 6 \quad \rightarrow \quad T = 1.32 \cdot 10^{10} K, \quad t = 0.54s \quad (1.18)$$

- daraus kann man nun das $\frac{n_n}{n_p}$ -Verhältniss berechnen:

$$x = 1 : \quad a = \frac{n_n}{n_p} = 0.216 \quad (1.19)$$

$$x = 6 : \quad a = \frac{n_n}{n_p} = 0.32 \quad (1.20)$$

1.6 Elektron-Positron-Zerfall

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$$

- $T = \frac{m_e c^2}{k_B} = 5.9 \cdot 10^9 K \Rightarrow t = 2.7s$

- x geht von 6 auf 4, es bleiben:

$$\underbrace{\nu_e, \bar{\nu}_e}, \underbrace{\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu}, \underbrace{\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau}, \gamma$$

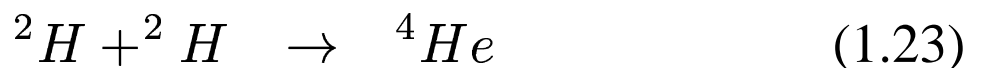
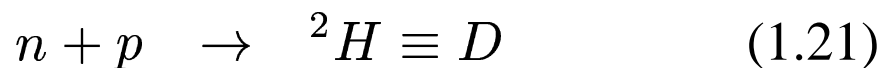
- bei $e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma$ wird die komplette Energie der Elektronen in Photonen umgewandelt
 \Rightarrow die Temperatur der γ -Strahlung geht langsamer zurück als die der Neutrinos
- ca. 3x höhere Anzahldichte von Photonen \rightarrow Energie eines Photons 3x höher als die Energie eines Neutrino-Antineutrino-Paars

$$\underbrace{E_\gamma} = \underbrace{E_{\nu_e} + E_{\nu_\mu} + E_{\nu_\tau}}_{E_\nu}$$

- die Energie aller Neutrinos ist nur noch so groß wie die der Photonen, die effektive Zahl der Strahlungsarten geht auf $x = 2$ zurück,
- damit schwindet auch der Einfluss der Leptonen, das Ende der Leptonen-Ära

1.7 Deuterium- und Heliumbildung

- nach weiterer Abkühlung des Universums beginnt die Bildung von Kernen mit mehreren Nukleonen, also z.B. Deuterium oder Helium



Die Reaktion $p + p \rightarrow D + e^+ + \nu + 1.44MeV$ findet wegen zu geringer Dichte ($10^{-4} \frac{g}{cm^3}$) nicht statt, aber ${}^4He + 2p \rightarrow {}^6Li + e^+ + \nu_e$ durch inneren β -Zerfall

- aus $\frac{N_n}{N_p}$, also a (1.13) und

$$\text{je zwei Neutronen pro } {}^4He\text{-Kern: } N_{4He} = \frac{N_n}{2} \quad (1.25)$$

$$\text{je Neutron ein Proton im } {}^4He: N_H = N_p - N_n \quad (1.26)$$

$$\text{Gesamtzahl: } N = N_{4He} + N_H = N_p - \frac{N_n}{2} \quad (1.27)$$

folgt das Verhältniss von Helium-4 zur

Gesamtteilchenzahl:

$$\begin{aligned} \frac{N_{4He}}{N} &= \frac{\frac{N_n}{2}}{N_p - \frac{N_n}{2}} = \frac{\frac{N_n}{2}}{\frac{2N_p}{2} - \frac{N_n}{2}} = \frac{N_n}{2N_p - N_n} \\ &= \frac{\frac{N_n}{N_p}}{2 - \frac{N_n}{N_p}} = \frac{a}{2 - a} \end{aligned} \quad (1.28)$$

- da aber in der Zwischenzeit Neutronen mit einer Halbwertszeit von $t_{\frac{1}{2}} 10.6$ Minuten zerfallen sind, ist das Verhältniss a nicht das zum Zeitpunkt des Einfrierens, sondern $\tilde{a} < a$

$$N_n = N_{n_0} e^{-\frac{\Delta t}{t_{\frac{1}{2}}} \ln 2} \quad (1.29)$$

$$N_p = N_{p_0} + (N_{n_0} - N_n) \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{a} &= \frac{N_n}{N_p} = \frac{N_{n_0} e^{-\frac{\Delta t}{t_{\frac{1}{2}}} \ln 2}}{N_{p_0} + (N_{n_0} - N_n)} \\ &= \frac{ae^{-\frac{\Delta t}{t_{\frac{1}{2}}} \ln 2}}{1 + a \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{t_{\frac{1}{2}}} \ln 2}\right)} \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\frac{N_{4He}}{N} = \frac{\tilde{a}}{2 - \tilde{a}} \quad (1.32)$$

1.8 Zeitpunkt des Deuterium- und Heliumbrennens

- der Zeitpunkt an dem sich das Verhältniss auf die rechte Seite verschiebt



- Entstehung von Deuterium über die starke Wechselwirkung
→ Stoßzeit sehr kurz, da sehr großer Wirkungsquerschnitt
→ Vorgang im thermodynamisches Gleichgewicht
- Dissoziationsgleichgewicht aus der Saha-Theorie

$$\frac{N_p N_n}{N_d} = 2 \cdot \left(\frac{m_p m_n}{m_d} \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_p + m_n - m_d}{k_B T} c^2} \quad (1.34)$$

- die Masse des Deuteriums ist die Summe er Massen eines Protons und eines Neutrons abzüglich der Bindungsenergie

$$m_d = m_p + m_n - \frac{\chi_d}{c^2} \rightarrow \chi_d = 2.23 \text{ MeV} \quad (1.35)$$

- damit

$$\frac{N_p N_n}{N_d} = 2 \cdot \left(\frac{m_p m_n}{m_p + m_n - \frac{\chi_d}{c^2}} \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T}} \quad (1.36)$$

- da ${}^4\text{He}$ mit 26 MeV eine viel größere Bindungsenergie hat, verbrennt bei dieser Temperatur ${}^2\text{D}$ sofort weiter
- der gesuchte Zeitpunkt, der Beginn des Heliumbrennens, ist durch $N_n = N_d$ festgelegt, also $\frac{N_n}{N_d} = 1$. Das

Gleichgewicht verschiebt sich langsam von $N_d = 0$ nach $N_n = 0$, wobei dann die Hälfte der vor diesem Prozess vorhandenen Neutronen noch als freie Neutronen vorhanden sind.

$$N_n = \frac{1}{2} \bar{N}_n \rightarrow N_p = \bar{N}_p - \frac{1}{2} \bar{N}_n \quad (1.37)$$

\bar{N}_n und \bar{N}_p : Teilchendichte vor dem Prozess

N_n und N_p : Teilchendichte während des Heliumbrennens

Wasserstoff ist dann in folgender Menge vorhanden: N_H

Helium ist dann in folgender Menge vorhanden: $N_{He} =$

$$\Rightarrow n := N_p = N_H + N_{He}$$

mit einigen Näherungen ($m_p \approx m_n, m_p \gg \frac{ch_i d}{c^2}$) vereinfacht sich der Ausdruck

$$N_p = 2 \cdot \left(\frac{m_p m_p}{2m_p} \frac{k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T}} = 2 \cdot \left(\frac{m_p k_B T}{4\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T}} \quad (1.39)$$

diese Anzahldichten können aus den heutigen Verhältnissen über die Rotverschiebung des Universums zurückgerechnet werden. Wenn die Rotverschiebung $z := \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ ist, dann ist mit den heutigen Werten n_0 und T_0

$$n = n_0(1 + z)^3 \text{ und } T = T_0(1 + z) \quad (1.40)$$

mit guter Näherung

$$z \gg 1 \rightarrow n = n_0 z^3 \text{ und } T = T_0 z \quad (1.41)$$

$$n = n_0 z^3 = 2 \cdot \left(\frac{m_p k_B T_0 z}{4\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T_0 z}} = \quad (1.42)$$

$$n_0 = 2 \cdot \left(\frac{m_p k_B T_0}{4\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} z^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T_0 z}} = \quad (1.43)$$

über die Dichte des heutigen Universums läßt sich n_0 herleiten:

$$\rho_0 = N_{H_0} \cdot m_H + N_{He_0} \cdot m_{He} \quad (1.44)$$

mit $m_{He} \approx 4m_H$

$$\text{und dem Verhältniss } \frac{N_{He}}{N_H} = \frac{\frac{N_n}{N_p}}{2 \frac{N_p - N_n}{N_p}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \right) \quad (1.45)$$

(1.46)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_0 &= N_{H_0} \cdot \left(m_H + 4m_H \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \right) \right) \quad (1.47) \\ &= N_{H_0} \cdot m_H \cdot \left(1 + 2 \frac{\tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \right) = N_{H_0} m_H \left(\frac{1 + \tilde{a}}{1 - \tilde{a}} \right) \quad (1.48) \end{aligned}$$

$$\rightarrow N_{H_0} = \frac{\rho_0}{m_H} \frac{1 - \tilde{a}}{1 + \tilde{a}} \quad (1.49)$$

$$\rightarrow N_{H_0} = \frac{1}{2} \frac{\rho_0}{m_H} \frac{\tilde{a}}{1 + \tilde{a}} \quad (1.50)$$

Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universum 6 die heutige Anzahldichte

$$n_0 = N_{H_0} + N_{He_0} = \frac{\rho_0}{m_H} \frac{1}{1 + \tilde{a}} \cdot \left(\frac{1}{2} \tilde{a} + 1 - \tilde{a} \right) = \frac{\rho_0}{m_H} \frac{1}{1 + \tilde{a}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho_0 &= \frac{n_0 m_H}{1 - \frac{\tilde{a}}{2}} (1 + \tilde{a}) & (1.53) \\ &= 2 \cdot \left(\frac{m_p k_B T_0}{4\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} z^{-\frac{3}{2}} m_H \frac{1 + \tilde{a}}{1 - \frac{\tilde{a}}{2}} e^{-\frac{\chi_d}{k_B T_0}} \end{aligned}$$

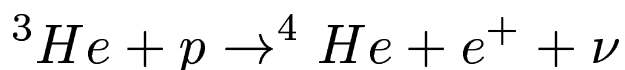
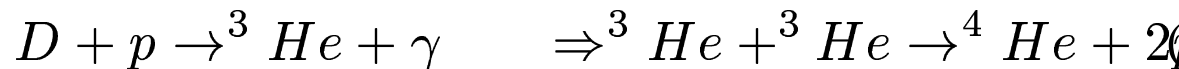
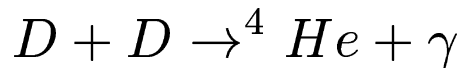
durch einsetzen verschiedener Werte für die Rotverschiebung z , können Werte ermittelt werden die mit den heutigen Messungen (z.B. baryonische Dichte des Universums) übereinstimmen. Dabei geht man von den heutigen Temperatur $T_0 = 2.7K$ und der heutigen baryonischen Dichte $\rho_0 = 2 \cdot 10^{-31} \frac{g}{cm^3}$ aus. Außerdem ist die Bindungsenergie $\chi_d = 2.23MeV$,
 $m_p \approx m_H$

$z [10^8]$	2.60	2.70	2.75	2.80	3.0
$T [10^8 K]$	7.02	7.29	7.4	7.56	8.1
$t [s]$	331.4	307.3	296.2	285.7	248.9
$\Delta t [s]$	330.8	306.7	295.7	285.2	248.4
$\Delta t [\text{min}]$	5.5	5.1	4.9	4.7	4.1
\tilde{a}	0.174	0.180	0.182	0.185	0.194
$\frac{N_{He}}{N}$	0.095	0.099	0.100	0.102	0.107
$\rho_0 [10^{-31} \frac{g}{cm^3}]$	0.31	1.15	2.15	3.9	34.8

Für $z = 2.75$ kommt die berechnete Dichte der heute Beobachteten am nächsten.

$$\rightarrow T = 7.4 \cdot 10^8 K$$

Das gebildete Deuterium verbrennt weiter



in diesem Frühstadium des Universums werden keine Elemente höherer Kernzahl gebildet. Die Dichte ist für die dafür notwendigen 3-fach Stöße schon zu gering geworden. Maximal wird jetzt noch ${}^8_4 Be$ (${}^4 He + {}^4 He \rightarrow {}^8 Be$) erreicht, was sehr instabil ist und sofort wieder zerfällt. Die Elemente 5 und 8 sind ebenfalls instabil und können nicht entstehen. Die höheren Elemente werden erst wieder in den

Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universum 8
 Sternen erbrütet, wo die Dichte hoch genug werden
 wird.

1.9 Übergang vom strahlungs- zum materiedo- minierten Universum

$$\rho_{Str} = \rho_{Mat} \Rightarrow x\sigma T^4 = \rho_{Mat} \quad (1.38)$$

mit $T = T_0 z$ und $\rho = \rho_0 z^3 \Rightarrow x\sigma T_0^4 z^4 = \rho_0 z^3 \quad (1.39)$

$$\Rightarrow z = \frac{\rho_0 c^2}{x\sigma T_0^4} \quad (1.40)$$

→ Dichte zum Zeitpunkt des Übergangs $\rho_b = 1.12 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$

→ $T = 604 \text{ K}$

→ $t = 4.5 \cdot 10^{14} \text{ s}$

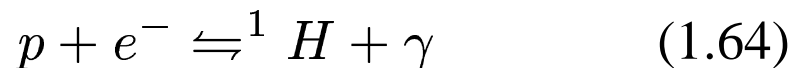
Damit endet das strahlungsdominierte Universum

1.10 Wasserstoffrekombination

Durch weitere Abkühlung des Universums wird es möglich, aus Protonen und Elektronen neutrale Atome zu bilden. Bis zu diesem Zeitpunkt werden die Photonen an den freien Elektronen gestreut werden (Thomson-Streuung), nun wird das Universum

Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universum 9
 durchsichtig. Dadurch fällt auch der Strahlungsdruck,
 der bis dahin die Materie noch auseinander treibt,
 weg und es können Kondensationsprozesse starten,
 also z.B. Galaxienbildung

die Rekombination von Wasserstoff



wird durch die elektromagnetische Kraft durchgeführt
 und läuft deshalb ebenfalls im thermodynamischen
 Gleichgewicht. Aus der Saha-Theorie folgt das Io-
 nisationsgleichgewicht:

mit $n := n_p + n_H$; Bindungsenergie des H $\chi_e = 13.6 \text{ eV}$

$$\frac{n_e}{n} = \frac{n_e}{n_p + n_H} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-\frac{\chi_e}{k_B T}}}{n} \left[\sqrt{1 + 2} \right]$$

es gibt nun zwei Grenzfälle:

1.

$$n \gg \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{2k_B T}} \quad (1.66)$$

$$\Rightarrow \frac{n_e}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{\chi_e}{2k_B T}} \ll 1 \quad (1.67)$$

also eine beinahe vollständige Umwandlung
 in neutralen Wasserstoff

2.

$$n \ll \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{2k_b T}} \quad (1.68)$$

$$\Rightarrow \frac{n_e}{n} = 1 - \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} n e^{\frac{\chi_e}{k_B T}} \approx 1 \quad (1.69)$$

alle Wasserstoffatome sind ionisiert (Protonen)

Der Zeitpunkt der Rekombination des Wasserstoffs wird dazwischen festgelegt:

$$\rightarrow n = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{k_b T}} \quad (1.70)$$

mit $n_R = n_0 z_R^3$ und $T_R = T_0 z_R$ wird es mit den heutigen Meßwerten zusammengefügt

$$\rightarrow n_0 z_R^3 = \left(\frac{m_e k_B T_0 z_R}{2\pi \hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{k_B T_0 z_R}} \quad (1.71)$$

$$\rightarrow n_0 = \left(\frac{m_e k_B T_0}{2\pi \hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} z_R^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{k_B T_0 z_R}} \quad (1.72)$$

mit $n_0 = \frac{\rho_{0,H}}{m_H} = \frac{\rho_0 \cdot 0.64}{m_H}$ aus dem Massenverhält-

Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universum 11 niss von Helium zu Wasserstoff

$$\rightarrow \rho_0 = \frac{n_0}{0.64} m_H = \left(\frac{m_e k_B T_0}{2\pi \hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} z_R^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\chi_e}{k_B T_0 z_R}} \cdot \frac{m_H}{0.64} \quad (1.73)$$

abermals kann nur numerisch gelöst werden

z_R	1372	1374	1376	1378
$T_R [10^3 K]$	3.70	3.71	3.72	3.73
$\rho_h [10^{-31} \frac{g}{cm^3}]$	1.79	1.91	2.02	2.11
$\rho_R [10^{-22} \frac{g}{cm^3}]$	4.64	4.94	5.27	5.61
$\rho_{RH} [10^{-22} \frac{g}{cm^3}]$	2.97	3.16	3.37	3.51
$t_R [10^{13} s]$	4.1	4.0	3.9	3.7
$t_R [Jahre]$	1310000	1270000	1230000	1190000

Der beste Wert für z ist 1376, da hier die heute gemessene Dichte am besten erreicht wird. Aus dem Schaubild 1 kann man noch eine zweite Lösung ablesen, bei $z = 2.69 \cdot 10^{15}$, allerdings liegt die Dichte in diesem Fall weit über der Kerndichte und somit ist diese Lösung irrelevant.

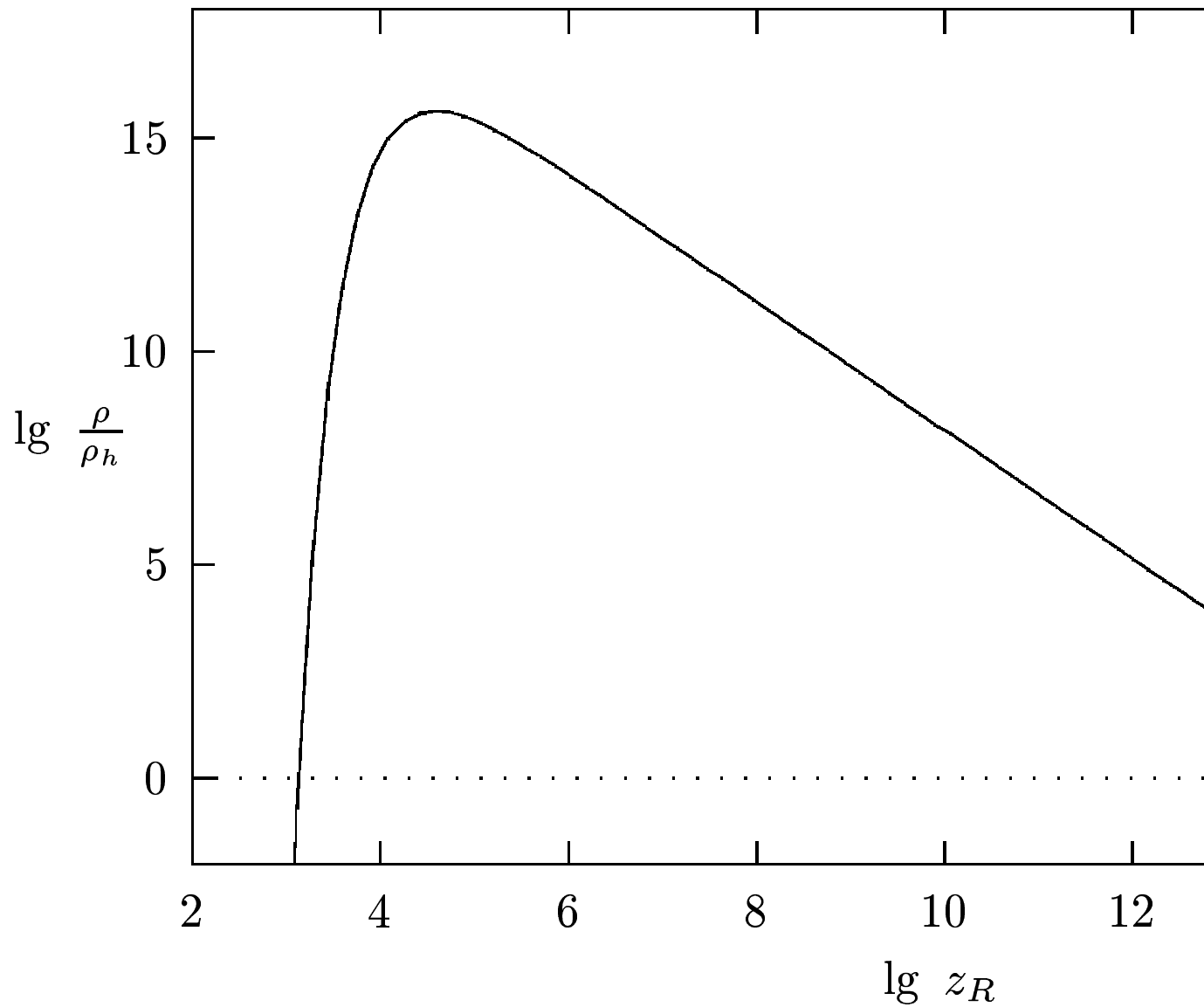


Abbildung: 1. Das Verhältniss $\frac{\rho}{\rho_h}$ abhängig von der Rotverschiebung z

2 Dunkle Materie

2.1 Warum braucht man überhaupt dunkle Materie?

Solange die Materie noch dem Strahlungsdruck der elektromagnetischen Strahlung (und auch der der anderen Wechselwirkungen) ausgesetzt ist, kann sie sich nicht durch die Gravitation zusammenballen, erst nach dem das Universum durchsichtig wird kann der Prozess der Galaxienbildung (Galaxienhaufen, Superhaufen, allgemein sehr große Strukturen im Universum) beginnen.

Da dies aber erst nach ca. 1400000 Jahren geschieht, ist es schon zu spät um die heutigen Strukturen noch erzeugen zu können, da die Dichte schon zu weit abgesunken ist. Die Zusammenballung hätte schon viel früher beginnen müssen.

Dunkle Materie schafft hier Abhilfe, sie könnte durch ihre Anwesenheit schon in der frühesten Phase des Universums zur Strukturierung beigetragen haben, denn die dunkle Materie hat ihrer Definition nach keinerlei Wechselwirkungen mit der elektromagnetischen Strahlung. Sie ist also nicht dem Strahlungsdruck unterworfen und macht sich nur durch ihre Gravitation bemerkbar.

Bei Messungen fällt auf das bei Spiralgalaxien die umlaufenden Sterne zum Teil deutlich von den bei der sichtbaren baryonischen Masse anzunehmenden Rotationsgeschwindigkeiten abweichen. Weit vom Zentrum entfernt bleiben die Geschwindigkeiten nahezu konstant anstatt mit $\sim \frac{1}{\sqrt{r}}$

Die Masse der Galaxien muß um ein Vielfaches größer sein als die leuchtende Materie zur Verfügung stellt.

große Galaxienhaufen haben zu wenig Masse um die Galaxien in ihnen mit den gemessenen großen kinetischen Energien zu halten, die Galaxien müßten wegfliegen

vielen Messungen zur Folge ist das Universum flach, d.h. die Dichte des Universums ist genau auf der Grenze zwischen einem offenem und geschlossenem Universum, d.h. die kritische Dichte. Auch hierfür wird wesentlich mehr Masse benötigt als durch die baryonische Masse vorhanden ist.

2.2 Was ist Dunkle Materie ?

2.2.1 *Neutrinos mit geringer Masse*

Neutrinos haben kaum Wechselwirkungen mit normaler Materie

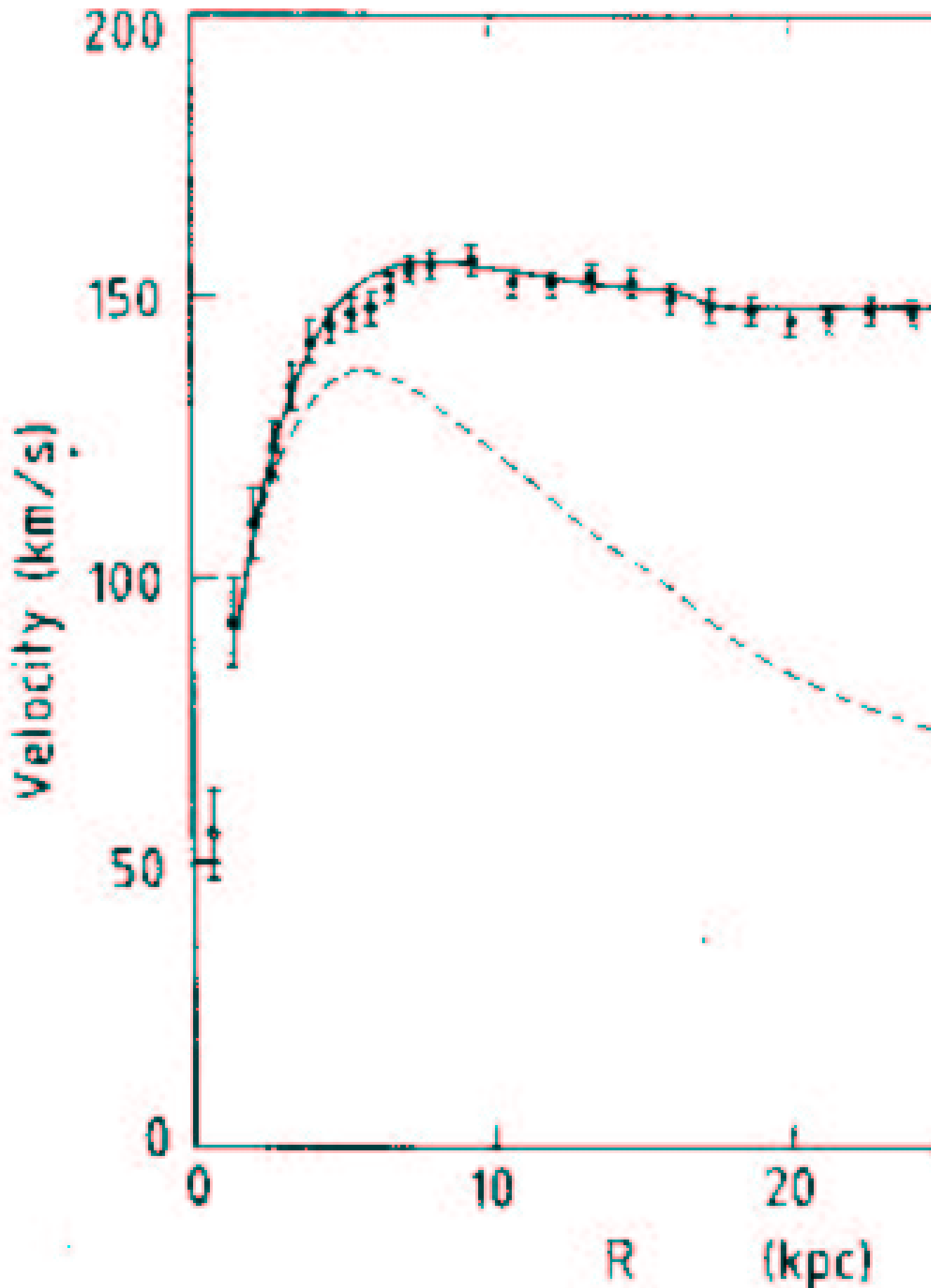


Abbildung: 2. Rotationsgeschwindigkeiten einer Galaxie in Abhängigkeit von ihrer Entfernung zu ihrem Zen-

Da im Frühstadium des Universums ca. ebenso viele Neutrinos wie Photonen freigesetzt werden, reicht schon eine geringe Masse pro Neutrino ($\sim \frac{1}{100000} \cdots \frac{1}{10000} \cdot m_e$) aus, um als Dunkle Materie fungieren zu können.

2.2.2 *Skalare Higgs Teilchen*

2.2.3 *Kosmische Strings*

2.2.4 *MOND-Theorie*

Es gibt für einige Effekte im Universum noch einen anderen Erklärungsansatz: die MOND-Theorie (Modified Newton Dynamic) diese modifiziert das zweite Newtonsche Gesetz, so daß bei sehr kleinen Beschleunigungen ($10^{-10} \frac{m}{s^2}$) die Kraft nicht $F = m \cdot a$, sondern eine deutlich kleinere Kraft, d.h auch eine deutlich kleinere Masse reicht aus, um die erforderliche Kraft zu erzeugen (siehe Abbildung 3)

Für große Beschleunigungen geht MOND in die normale newtonsche Dynamik über, ist also wie die QM oder die RT eine Erweiterung der klassischen Mechanik für ein spezielles Gebiet extremer Werte (Beschleunigung)

allerdings kann MOND nicht auf das komplette Universum angewendet werden, ebenso kann sie nicht auf relativistische Fälle, also andere Extreme (hohe Masse, hohe Geschwindigkeiten) angewen-

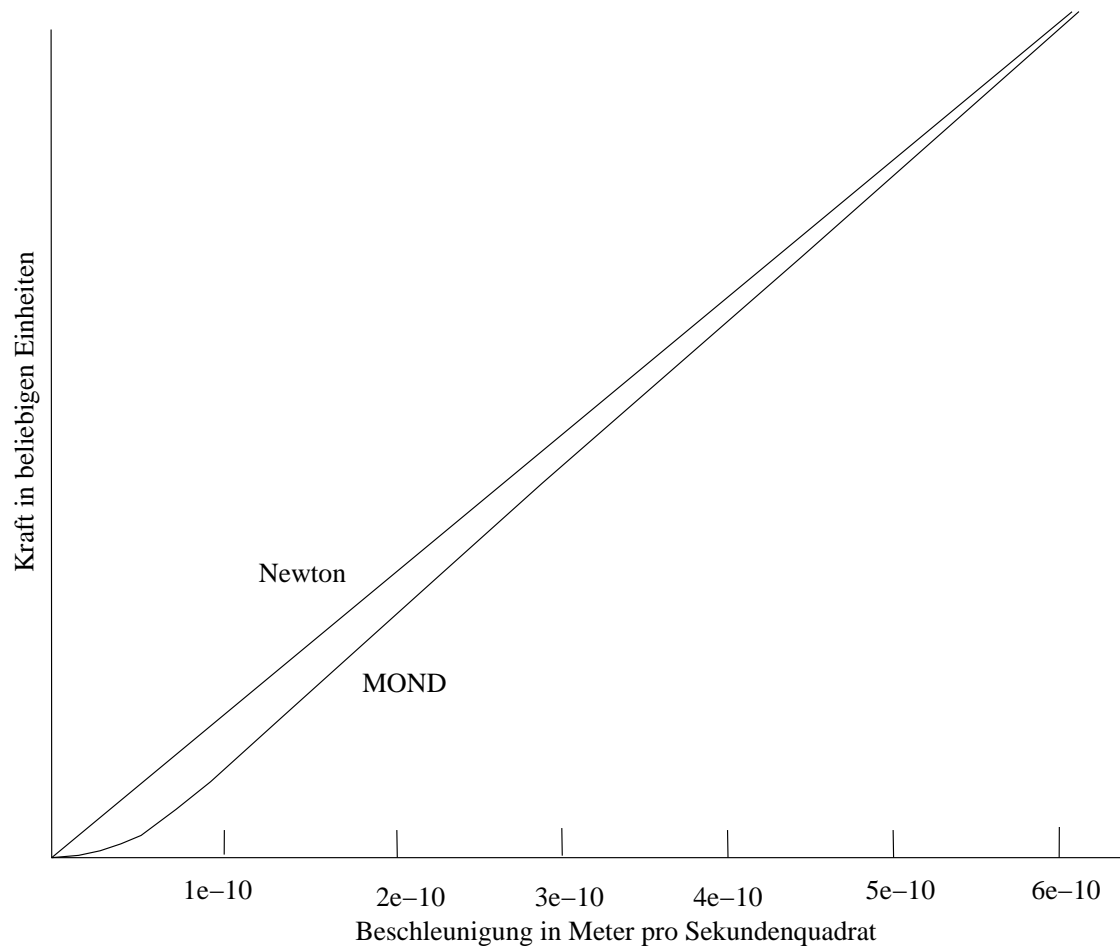


Abbildung: 3. MOND modifiziert Newtons 2. Gesetz

Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universum 18
det werden. MOND kann z.B. keine Gravitations-
linseneffekte erklären

außerdem reicht auch MOND alleine nicht aus,
um die fehlende Masse komplett zu ersetzen, es wird
weiterhin zusätzliche dunkle Materie benötigt.

2.3 Wie beobachtet man dunkle Materie

Literatur

- [1] Heinz Dehnen; *Theorie der Sternentwicklung, Physikalische Kosmologie*, Vorlesungsmanuskript, unveröffentlicht ca. 1984
- [2] Lawrence M. Krauss *Kosmologie und Teilchenphysik: Dunkle Materie im Universum*, Spektrum, Heidelberg, 1990, S. 32ff
- [3] Peebles; *Physical Cosmology*, Princeton University Press,
- [4] Steven Weinberg; *Die ersten drei Minuten*, dtv, 1980
- [5] L. Tarrassow *Symetrie, Symetrie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1982

Hier Name und Adresse einfügen

Moritz Bubek

...

Thermische Entwicklung des Frühstadiums des Universum 19
E-mail: bubek@gmx.de

Vortrag gehalten am: 5. November 2002. Ausarbeitung
vom: 5. November 2002

Autor des Templates: Dr. Bertfried Fauser (Sep. 2000),
Änderungen: Dr. Eva Geßner (Aug. 2002)